Bulletin of the *Transilvania* University of Braşov • Vol 2(51) - 2009
Series III: Mathematics, Informatics, Physics, 75-84

CONDITIONS AFFAIBLIES D'ADMISSIBILITÉ POUR UNE DENSITÉ SURFACIQUE DE FORCE DANS LES PROBLÉMES DE COQUES EN MEMBRANE INHIBÉES

Robert LUCE [1] , Cécile POUTOUS[2] and Jean-Marie THOMAS [1]

Communicated to:
9-ème Colloque franco-roumain de math. appl., 28 août-2 sept. 2008, Braşov, Romania

Abstract

Pour des problèmes de coques en membranes, nous avons donné dans [5] et [6] des conditions d'admissibilité indépendantes de l'épaisseur pour des forces extérieures surfaciques. Nous étudions ici la pertinence de ces critères dans des cas représentatifs de géométries et d'encastrement.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 74B05, 74K15, 74K25.

1 Introduction

Considérons une famille de coques en membrane généralisées linéairement élastiques de type 1 c'est à dire en flexion pure inhibée (voir définition dans [2] p262 ou dans [8]) de surface génératrice S et soumettons la à des densités surfaciques de forces extérieures $\mathbf{h}$, les conditions d'encastrement se traduisant par des conditions aux limites de type Dirichlet homogène, posées sur une même portion du bord latéral Γ_0.

En faisant tendre l'épaisseur des coques vers zéro, on ramène les problèmes variationnels 3D bien posés à un problème variationnel 2D bien posé lorsque $\mathbf{h}$ appartient au dual de l'espace où on cherche les déplacements (voir [1], p129 ou [2]). Si les forces vérifient de plus les "*conditions d'admissibilité*" données dans [3], alors la suite des solutions 3D converge fortement et sa valeur moyenne dans l'épaisseur converge fortement également, vers l'unique solution du problème 2D.

Dans [5] nous avons simplifié les conditions d'admissibilité dans le cas où les forces extérieures sont exclusivement surfaciques et les avons rendues indépendantes de l'épaisseur. Cette nouvelle formulation permet par la suite d'identifier plus facilement des conditions suffisantes d'admissiblité, en donnant par exemple des conditions d'existence de solutions à un système d'EDP comme dans les cas particuliers traités dans [6] et dans [7]. Toutefois la méthode utilisée dans le cas de surfaces hyperboliques ou paraboliques ne permet

[1]Université de Pau et des pays de l'Adour, Pau, France
[2]École de l'air, Salon de Provence, France

pas de conclure dans le cas "*pathologique*" (voir [8]) de surfaces elliptiques partiellement encastrées comme nous allons le voir en étudiant le cas d'une demi-sphère décalotée, encastrée sur sa base.

2 Notations et définitions

Dans ce papier, les indices grecs sont à valeur dans $\{1,2\}$, et les indices latins sont dans $\{1,2,3\}$. On utilise la convention de l'indice répété et δ_{ij} désigne les symboles de Kronecker.

Dans un domaine ω de $\mathbb{R}^2$, considérons une carte $\theta : \overline{\omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \in C^3\left(\overline{\omega};\mathbb{R}^3\right)$, injective, telle que, pour $\alpha = 1,2$, les deux vecteurs $\mathbf{a}_\alpha = \partial_\alpha \theta(y)$ soient linéairement indépendants en tout point $y \in \overline{\omega}$. Supposons que la surface génératrice des coques soit $S = \theta(\overline{\omega})$ et que les coques soient encastrées le long de $\Gamma_0 = \theta(\gamma_0)$ et notons $\mathbf{V}(\omega)$ l'ensemble $\left\{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\omega), \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \gamma_0\right\}$.

Sous ces hypothèses, les conditions d'admissibilité pour la densité de force surfacique $\mathbf{h} := (h^i)$ obtenues dans [5] reviennent à trouver des conditions d'existence d'un tenseur symétrique $(h^{\alpha\beta})$ à composantes dans $L^2(\omega)$ tel que :

$$\int_\omega h^i v_i \sqrt{a}\, d\omega = \int_\omega h^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v})\sqrt{a}\, d\omega, \quad \forall \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{V}(\omega) \tag{1}$$

où a est le déterminant du tenseur métrique de S exprimé en composantes covariantes $(a_{\alpha\beta}) = (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta)$ et $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$ sont les composantes covariantes du tenseur linéarisé de changement de métrique. Ces composantes ont pour expression

$$\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) := \tfrac{1}{2}\left(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta\right) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3$$

où les symboles de Christoffel $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ et les composantes covariantes $b_{\alpha\beta}$ du tenseur de courbure de S sont obtenus de la base covariante $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ (avec $\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2|}$) et de la base contravariante $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$ (avec $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$) selon les formules :

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} := \mathbf{a}^\sigma \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta \text{ et } b_{\alpha\beta} := \mathbf{a}_3 \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta$$

.

3 Applications à différents types de géométries

Pour exploiter la formulation variationnelle (1), on a montré dans [6] que si on trouve des conditions suffisantes sur $\mathbf{h}$ pour que le système d'EDP

$$\left\{\begin{array}{l} -\partial_\beta(h^{\alpha\beta}\sqrt{a}) - \Gamma^\alpha_{\sigma\beta}(h^{\sigma\beta}\sqrt{a}) = h^\alpha\sqrt{a} \quad \text{pour } \alpha = 1,2 \\ -b_{11}h^{11} - 2b_{12}h^{12} - b_{22}h^{22} = h^3 \end{array}\right. \tag{2}$$

d'inconnues $h^{\alpha\beta}$ admette au moins une solution telle que

$$\left\{\begin{array}{l} h^{11} \in L^2(\omega),\ \partial_1 h^{11} \in L^2(\omega),\ h^{11}n_1 = 0 \text{ sur } \gamma_1, \\ h^{22} \in L^2(\omega),\ \partial_2 h^{22} \in L^2(\omega),\ h^{22}n_2 = 0 \text{ sur } \gamma_1, \\ h^{12} \in H^1(\omega),\ h^{12} = 0 \text{ sur } \gamma_1, \\ h^{12} = h^{21}, \end{array}\right. \tag{3}$$

où γ_1 représente le bord libre, alors une telle densité $\mathbf{h}$ est admissible.

3.1 Géométrie hyperbolique

On étudie ici le cas d'un hyperboloïde de révolution $\mathcal{H}$ encastré sur sa base. Les équations cartésiennes de $\mathcal{H}$ sont

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \text{ et } z_0 \leq x_3 \leq z_1.$$

On choisit une paramétrisation of $\mathcal{H}$ le long des lignes asymptotiques de sorte que

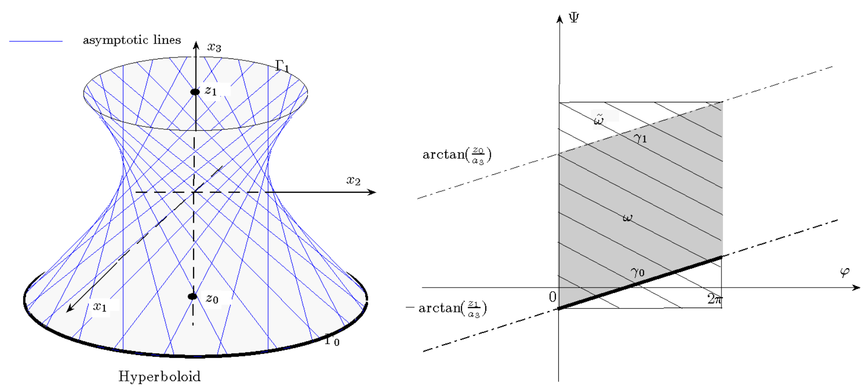

Figure 1: hyperboloïde de révolution encastré sur sa base

$$\begin{aligned} \theta : \quad \overline{\omega} \quad & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \psi) \quad & \longmapsto \left(a_1 \frac{\cos(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi)}, a_2 \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi)}, a_3 \tan(\varphi - \psi) \right) \end{aligned}$$

où ω est l'ouvert

$$\begin{aligned} \omega \quad & := \left\{ \quad (\varphi, \psi), \varphi \in]0, \pi[, \psi \in \left] \varphi - \arctan \tfrac{z_1}{a_3}, \varphi - \arctan \tfrac{z_0}{a_3} \right[\quad \right\} \\ & := \left\{ \quad (\varphi, \psi), \psi \in \left] -\arctan \tfrac{z_1}{a_3}, \pi - \arctan \tfrac{z_0}{a_3}, \right[, \right. \\ & \qquad \left. \varphi \in \left] \max\left(\psi + \arctan \tfrac{z_0}{a_3}, 0\right), \min\left(\psi + \arctan \tfrac{z_1}{a_3}, \pi\right) \right[\quad \right\}, \end{aligned}$$

le bord libre Γ_1 est paramétré par

$$\begin{aligned} \gamma_1 \quad & := \left\{ \left(\varphi, \varphi - \arctan \tfrac{z_1}{a_3} \right), \varphi \in]0, \pi[\right\} \\ & := \left\{ \left(\psi + \arctan \tfrac{z_1}{a_3}, \psi \right), \psi \in \left] -\arctan \tfrac{z_1}{a_3}, \pi - \arctan \tfrac{z_0}{a_3} \right[\right\}, \end{aligned}$$

le bord encastré Γ_0 est paramétré par

$$\begin{aligned} \gamma_0 \quad & := \left\{ \left(\varphi, \varphi - \arctan \tfrac{z_0}{a_3} \right), \varphi \in]0, \pi[\right\} \\ & := \left\{ \left(\psi + \arctan \tfrac{z_0}{a_3}, \psi \right), \psi \in \left] -\arctan \tfrac{z_1}{a_3}, \pi - \arctan \tfrac{z_0}{a_3} \right[\right\}. \end{aligned}$$

Considérons enfin l'ouvert $\tilde{\omega}$ contenant l'ouvert ω

$$\tilde{\omega} := \left]\arctan\frac{z_0}{a_3} - \arctan\frac{z_1}{a_3}, \pi\right[\times \left]\arctan\frac{z_0}{a_3} - \arctan\frac{z_1}{a_3}, \pi - \arctan\frac{z_0}{a_3}\right[.$$

On cherche le déplacement dans l'espace $\mathbf{V}(\omega)$ défini par

$$\mathbf{V}(\omega) = \left\{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\omega), \mathbf{v}\, \pi\text{-périodique}, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \gamma_0\right\},$$

et on introduit les espaces

$$V_\varphi(\omega) := \left\{h \in L^2(\omega), \partial_\varphi h \in L^2(\omega), h\ \pi\text{-périodique and } h\nu_\varphi = 0 \text{ sur } \gamma_1\right\},$$

$$V_\psi(\omega) := \left\{h \in L^2(\omega), \partial_\psi h \in L^2(\omega), h\ \pi\text{-périodique and } h\nu_\psi = 0 \text{ sur } \gamma_1\right\}.$$

La seconde forme fondamentale $(b_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$ est π-périodique et vérifie

$$b_{11} = b_{22} = 0 \text{ and } b_{12} \neq 0,$$

les symboles de Christoffel sont également π-périodiques, tels que,

$$\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^2 = 2\tan(\varphi - \psi), \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{12}^1 \neq 0 \text{ and } \Gamma_{12}^2 \neq 0,$$

enfin, la jacobienne $\sqrt{a}$ est π-périodique non nulle. En conséquence, d'après (2) et (3) la densité π-périodique de force surfacique $\mathbf{h}$ est admissible s'il existe $h^{11} \in V_\varphi(\omega)$, $h^{22} \in V_\psi(\omega)$ et $h^{12} \in V_\varphi(\omega) \cap V_\psi(\omega)$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{l} -\partial_\varphi(h^{11}\sqrt{a}) - \partial_\psi(h^{12}\sqrt{a}) - \Gamma_{11}^1 h^{11}\sqrt{a} - 2\Gamma_{12}^1 h^{12}\sqrt{a} = h^1\sqrt{a} \\ -\partial_\varphi(h^{12}\sqrt{a}) - \partial_\psi(h^{22}\sqrt{a}) - \Gamma_{22}^2 h^{22}\sqrt{a} - 2\Gamma_{12}^2 h^{12}\sqrt{a} = h^2\sqrt{a} \\ -2b_{12}h^{12} = h^3 \end{array}\right. \tag{4}$$

Theorem 1. *La densité π-périodique de force surfacique* $\mathbf{h}$ *est admissible si*

$$\left\{\begin{array}{l} h^3 \in H^1(\omega), \partial_{\varphi\psi}h^3 \in L^2(\omega), h^3 = 0 \textit{ sur } \gamma_1 \\ \partial_\varphi h^1 \in L^2(\omega), \\ \partial_\psi h^2 \in L^2(\omega). \end{array}\right. \tag{5}$$

Proof. Soit $\mathbf{h} = (h^i)$ une fonction π-périodique de $\mathbf{L}^2(\omega)$ vérifiant (5). Nous savons que $\mathbf{h}$ est admissible si on peut trouver h^{11} dans $V_\varphi(\omega)$, h^{22} dans $V_\psi(\omega)$ et h^{12} dans $V_\varphi(\omega) \cap V_\psi(\omega)$ satisfaisant (4). La fonction $h^{12} = -\frac{h^3}{2b_{12}}$ convient puisqu'elle est dans $V_\varphi(\omega) \cap V_\psi(\omega)$. On remplace h^{12} par cette valeur dans (4) et on obtient ainsi deux EDP découplées :

$$-\partial_\varphi\left(h^{11}\sqrt{a}\right) - 2\tan(\varphi - \psi)\left(h^{11}\sqrt{a}\right) = \left(h^1\sqrt{a}\right) - \partial_\psi\left(\frac{1}{2b_{12}}h^3\sqrt{a}\right) - \frac{\Gamma_{12}^1}{b_{12}}h^3\sqrt{a}$$

et

$$-\partial_\psi\left(h^{22}\sqrt{a}\right) + 2\tan(\varphi - \psi)\left(h^{22}\sqrt{a}\right) = \left(h^2\sqrt{a}\right) - \partial_\psi\left(\frac{1}{2b_{12}}h^3\sqrt{a}\right) - \frac{\Gamma_{12}^2}{b_{12}}h^3\sqrt{a}.$$

On remarque que

$$\partial_\varphi \left(h^{11}\sqrt{a}\right) + 2\tan\left(\varphi-\psi\right)\left(h^{11}\sqrt{a}\right) = \cos^2\left(\varphi-\psi\right)\partial_\varphi\left(\frac{h^{11}\sqrt{a}}{\cos^2\left(\varphi-\psi\right)}\right),$$

et que

$$\partial_\psi \left(h^{22}\sqrt{a}\right) - 2\tan\left(\varphi-\psi\right)\left(h^{22}\sqrt{a}\right) = \cos^2\left(\varphi-\psi\right)\partial_\psi\left(\frac{h^{22}\sqrt{a}}{\cos^2\left(\varphi-\psi\right)}\right),$$

ainsi, après avoir posé

$$\hat{f}_1 := \frac{1}{\cos^2\left(\varphi-\psi\right)}\left(-\left(h^1\sqrt{a}\right) + \partial_\psi\left(\frac{1}{2b_{12}}\left(h^3\sqrt{a}\right)\right) + \frac{\Gamma_{12}^1}{b_{12}}\left(h^3\sqrt{a}\right)\right)$$

et

$$\hat{f}_2 := \frac{1}{\cos^2\left(\varphi-\psi\right)}\left(-\left(h^2\sqrt{a}\right) + \partial_\varphi\left(\frac{1}{2b_{12}}\left(h^3\sqrt{a}\right)\right) + \frac{\Gamma_{12}^2}{b_{12}}\left(h^3\sqrt{a}\right)\right).$$

où $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ sont toutes les deux π-périodiques et appartiennent à $L^2\left(\omega\right)$ du fait des régularités supposées, on en déduit que $\mathbf{h}$ est admissible si on peut trouver une fonction $h^{11} \in V_\varphi\left(\omega\right)$ telle que :

$$\partial_\varphi\left(\frac{h^{11}\sqrt{a}}{\cos^2\left(\varphi-\psi\right)}\right) = \hat{f}_1 \text{ dans } L^2\left(\omega\right)$$

et une fonction $h^{22} \in V_\psi\left(\omega\right)$ telle que :

$$\partial_\psi\left(\frac{h^{22}\sqrt{a}}{\cos^2\left(\varphi-\psi\right)}\right) = \hat{f}_2 \text{ dans } L^2\left(\omega\right).$$

Prolongeons $\hat{f}_1$ par zéro sur $\tilde{\omega}$ et notons $\tilde{f}_1$ cette extension. Comme $\hat{f}_1$ est dans $L^2\left(\omega\right)$ alors $\tilde{f}_1$ est dans $L^2\left(\tilde{\omega}\right)$. Pour presque tout $\left(\varphi,\psi\right) \in \omega$, définissons la fonction

$$g\left(\varphi,\psi\right) := \frac{\cos^2\left(\varphi-\psi\right)}{\sqrt{a}}\int_{\psi+\arctan\frac{z_0}{a_3}}^{\varphi} \hat{f}_1\left(\eta,\psi\right)d\eta,$$

et montrons que g appartient à $V_\varphi\left(\omega\right)$. Pour le faire, il suffit de prouver que l'intégrale $\int_{\psi+\arctan\frac{z_0}{a_3}}^{\varphi} \hat{f}_1\left(\eta,\psi\right)d\eta$ est dans $L^2\left(\omega\right)$ et s'annule sur γ_1. Ce deuxième point est évident. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour presque tout $\left(\varphi,\psi\right) \in \omega$, nous avons :

$$\left(\int_{\psi+\arctan\frac{z_0}{a_3}}^{\varphi} \hat{f}_1\left(\eta,\psi\right)d\eta\right)^2 \leq \left|\int_{\psi+\arctan\frac{z_0}{a_3}}^{\varphi} \hat{f}_1^2\left(\eta,\psi\right)d\eta\int_{\psi+\arctan\frac{z_0}{a_3}}^{\varphi} 1^2 d\eta\right|.$$

Puisque pour tout $\left(\varphi,\psi\right) \in \omega$ nous avons $\left|\varphi-\psi-\arctan\frac{z_0}{a_3}\right| \leq \pi$ et comme $\hat{f}_1$ est π-périodique, alors,

$$\left(\int_{\psi+\arctan\frac{z_0}{a_3}}^{\varphi} \hat{f}_1\left(\eta,\psi\right)d\eta\right)^2 \leq \pi\int_0^\pi \hat{f}_1^2\left(\eta,\psi\right)d\eta$$

de plus $\omega \subset \tilde{\omega}$, par conséquent on a les majorations suivantes :

$$\int_{\omega} \left(\int_{\psi+\arctan \frac{z_0}{a_3}}^{\varphi} \hat{f}_1 \left(\eta, \psi\right) \partial\eta \right)^2 dy \leq \pi \int_{\tilde{\omega}} \left(\int_0^{\pi} \tilde{f}_1^2 \left(\eta, \psi\right) d\eta \right) dy.$$

On conclut avec le théorème de Tonelli que :

$$\pi \int_{\tilde{\omega}} \left(\int_0^{\pi} \tilde{f}_1^2 \left(\eta, \psi\right) d\eta \right) dy = \pi^2 \|\tilde{f}_1\|_{0,\tilde{\omega}}^2 < \infty.$$

Par conséquent $h^{11} = g$ convient. De la même manière, on trouve une fonction h^{22} dans $V_\psi \left(\omega\right).$ $\square$

3.2 Géométrie parabolique

On étudie maintenant le cas d'un cylindre $\mathcal{C}$ encastré sur sa base.

$$\mathcal{C} := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 = \cos\theta, x_2 = sin\theta, x_3 = z \text{ pour } (\theta, z) \in \bar{\omega} \right\}$$

où

$$\omega :=]0, 2\pi[\times]0, z_0[\text{ et } z_0 > 0,$$

En coordonnées cylindriques, le bord encastré Γ_0 et le bord libre Γ_1 sont paramétrés par

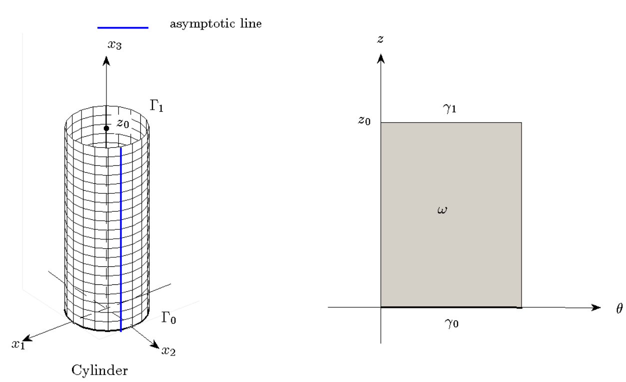

Figure 2: Cylindre encastré sur sa base

$$\gamma_0 := [0, 2\pi[\times \{0\} \text{ et } \gamma_1 := [0, 2\pi[\times \{z_0\},$$

les composantes covariantes de la deuxième forme fondamentale $\left(b_{\alpha\beta}\right)_{\alpha\beta}$ valent

$$b_{11} = -1, b_{12} = 0 \text{ et } b_{22} = 0,$$

tous les symboles de Christoffel sont nuls, la jacobienne $\sqrt{a}$ vaut 1, et on cherche le déplacement dans l'ensemble

$$\mathbf{V}(\omega) := \left\{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\omega), \mathbf{v}\ 2\pi\text{-périodique par rapport à } \theta,\ \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \gamma_0\right\}$$

auquel on associe l'ensemble

$$V(\omega) := \left\{v \in H^1(\omega), v\ 2\pi\text{-périodique par rapport à } \theta,\ v = 0 \text{ sur } \gamma_0\right\}.$$

La condition d'admissibilité (1) s'écrit : trouver $h^{\alpha\beta} \in L^2(\omega)$ symétriques telles que pour tout $\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{V}(\omega)$

$$\int_\omega h^i v_i dy = \int_\omega \left(h^{11}(\partial_\theta v_1 + v_3) + h^{12}(\partial_z v_1 + \partial_\theta v_2) + h^{22}\partial_z v_2\right) dy \tag{6}$$

Theorem 2. *La densité surfacique $\mathbf{h} = \left(h^i\right) \in \mathbf{L}^2(\omega)$, 2π-périodique par rapport à la première variable, est admissible si $\partial_\theta h^1$, $\partial_\theta h^3$ et $\partial_{\theta\theta} h^3$ appartiennent à $L^2(\omega)$.*

Proof. Soit v un élément de $V(\omega)$ et soit $\mathbf{h} = \left(h^i\right)$ une fonction 2π-périodique par rapport à la première variable de $\mathbf{L}^2(\omega)$ ayant la régularité du théorème précédent. En choisissant successivement comme fonction test $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, $(0, v, 0)$ et $(0, 0, v)$ dans (6) on obtient les trois équations suivantes :

$$\int_\omega h^1 v dy = \int_\omega \left(h^{11}\partial_\theta v + h^{12}\partial_z v\right) dy$$

$$\int_\omega h^2 v dy = \int_\omega \left(h^{12}\partial_\theta v + h^{22}\partial_z v\right) dy$$

$$\int_\omega h^3 v dy = \int_\omega h^{11} v dy$$

qui doivent être vérifiées pour tout $v \in V(\omega)$. Ce qui est le cas quand on prend pour h^{11}, h^{12} et h^{22} les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} h^{11} &= h^3, \\ h^{12} &= \int_z^{z_0} \left(h^1 + \partial_\theta h^3\right) dz, \\ h^{22} &= \int_z^{z_0} \left(h^2 + \int_z^{z_0} \partial_\theta \left(h^1 + \partial_\theta h^3\right) dz\right) dz. \end{aligned}$$

□

3.3 Géométrie elliptique

On s'intéresse à une demi-sphère décalotée $\mathcal{S}$, encastrée sur sa base, d'équations cartésiennes

$$\mathcal{S} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ avec } 0 \leq z \leq z_0\right\}.$$

En coordonnées sphériques, elle s'écrit :

$$\mathcal{S} := \{(\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi),\ (\theta, \varphi) \in \overline{\omega}\}$$

avec

$$\omega :=]0, 2\pi[\times]0, \varphi_1[\text{ et } \varphi_1 = \arcsin(z_0).$$

Le bord encastré Γ_0 et le bord libre Γ_1 sont représentés par :

$$\gamma_0 =]0, 2\pi[\times \{0\} \text{ et } \gamma_1 =]0, 2\pi[\times \{\varphi_1\}.$$

Dans ces conditions, les coordonnées covariantes du tenseur symétrique de courbure sont $b_{11} = -\cos^2\varphi$, $b_{12} = 0$ et $b_{22} = -1$, les symboles de Christoffel sont tous nuls à l'exception de $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\tan\varphi$ et $\Gamma^2_{11} = \sin\varphi\cos\varphi$ et la jacobienne vaut $\sqrt{a} = \cos\varphi$. D'après (2) et (3), la densité $\mathbf{h}$ est admissible si le système d'EDP

$$\left\{\begin{array}{l} -\partial_\theta(h^{11}\cos\varphi) - \partial_\varphi(h^{12}\cos\varphi) + 2\sin\varphi\, h^{12} = h^1\cos\varphi \\ -\partial_\theta(h^{12}\cos\varphi) - \partial_\varphi(h^{22}\cos\varphi) - \cos^2\varphi\sin\varphi\, h^{11} = h^2\cos\varphi \\ \cos^2\varphi\, h^{11} + h^{22} = h^3 \end{array}\right.$$

d'inconnues $h^{\alpha\beta}$ admet au moins une solution telle que :

$$\left\{\begin{array}{lll} h^{11} \in L^2(\omega), & \partial_\theta h^{11} \in L^2(\omega), & \\ h^{22} \in L^2(\omega), & \partial_\varphi h^{22} \in L^2(\omega), & h^{22} = 0 \quad \text{sur } \gamma_1 \\ h^{12} \in H^1(\omega), & h^{12} = h^{21} & h^{12} = 0 \quad \text{sur } \gamma_1 \end{array}\right.$$

On élimine h^{11} dans les deux premières équations et on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_\theta(\frac{h^{22}}{cos\varphi}) - \partial_\varphi(h^{12}\cos\varphi) + 2\sin\varphi\, h^{12} = h^1\cos\varphi + \partial_\theta(\frac{h^3}{\cos\varphi}) \\ -\partial_\theta(h^{12}\cos\varphi) - \partial_\varphi(h^{22}\cos\varphi) + \sin\varphi\, h^{22} = h^2\cos\varphi + \sin\varphi\, h^3 \\ h^{11} = \frac{h^3}{\cos^2\varphi} - \frac{h^{22}}{cos^2\varphi} \end{array}\right.$$

on multiplie chaque ligne par $\cos^3\varphi$, $\cos\varphi$ et $\cos^4\varphi$ respectivement

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_\theta(cos^2\varphi\, h^{22}) - \cos\varphi\,\partial_\varphi(\cos^3\varphi\, h^{12}) = h^1\cos^4\varphi + \partial_\theta(h^3\cos^2\varphi) \\ -\partial_\theta(h^{12}\cos^2\varphi) - \partial_\varphi(\cos^2\varphi\, h^{22}) = h^2\cos^2\varphi + \sin\varphi\,\cos\varphi\, h^3 \\ \cos^4\varphi\, h^{11} = \cos^2\varphi\, h^3 - h^{22}cos^2\varphi. \end{array}\right.$$

Posons maintenant

$$H^{22} = cos^2\varphi\, h^{22}, \text{ et } H^{12} = cos^3\varphi\, h^{12}$$
$$f^1 = h^1\cos^4\varphi + \cos^2\varphi\,\partial_\theta h^3 \text{ et } f^2 = h^2\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\, h^3.$$

On cherche donc des conditions sur f^1 et f^2 pour que le système :

$$\left\{\begin{array}{lll} H^{12} \in H^1(\omega) & & \\ H^{22} \in L^2(\omega),\ \partial_\varphi H^{22} \in L^2(\omega) & & \\ h^{11} \in L^2(\omega),\ \partial_\theta h^{11} \in L^2(\omega) & & \\ \partial_\theta H^{22} - \cos\varphi\,\partial_\varphi H^{12} = f^1 & \text{dans } \omega & (E1) \\ -\frac{1}{\cos\varphi}\partial_\theta H^{12} - \partial_\varphi H^{22} = f^2 & \text{dans } \omega & (E2) \\ \cos^4\varphi\, h^{11} = \cos^2\varphi\, h^3 - H^{22} & \text{dans } \omega & (E3) \\ H^{12} = 0 \text{ et } H^{22} = 0 & \text{sur } \gamma_1. & \end{array}\right. \tag{7}$$

admette au moins une solution. Dans ce cas H^{12} doit vérifier les conditions de régularité et de bord ainsi que l'EDP elliptique du deuxième ordre obtenue en éliminant H^{22} par le calcul de $\partial_\theta(E1) + \partial_\varphi(E2)$:

$$\begin{cases} H^{12} \in H^1(\omega) \\ H^{12} = 0 \text{ sur } \gamma_1 \\ -\partial_\varphi(\cos\varphi\, \partial_\varphi H^{12}) - \dfrac{1}{\cos\varphi}\partial^2_{\theta\theta} H^{12} = \partial_\varphi f^1 + \partial_\theta f^2. \end{cases} \tag{8}$$

Ce problème admet des solutions dès que $\partial_\varphi f^1 + \partial_\theta f^2$ est dans $L^2(\omega)$ puisqu'il suffit de rajouter une condition supplémentaire de la forme $\partial_\nu H^{12} = g$ sur γ_0 pour qu'il soit bien posé. Reste donc à vérifier si les H^{12} ainsi construits permettent d'obtenir H^{22} dans le bon espace. Pour prendre en compte la condition de bord sur γ_1, l'équation $(E2)$ de (7) impose le choix de la primitive de $\partial_\varphi H^{22}$ à savoir, la fonction :

$$H^{22} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \left(-\frac{1}{\cos\varphi}\partial_\theta H^{12} - f^2 \right) d\varphi. \tag{9}$$

Cette fonction doit satisfaire $(E1)$, c'est pourquoi on calcule $\partial_\theta H^{22}$ en dérivant (9) puis on remplace l'expression obtenue dans $(E1)$. La fonction intégrée étant dans $L^2(\omega)$, on peut permuter les signes dérivée partielle et intégrale (voir [6]) d'où :

$$\partial_\theta H^{22} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \partial_\theta \left(-\frac{1}{\cos\varphi}\partial_\theta H^{12} - f^2 \right) d\varphi$$

H^{12} est solution de (8) par conséquent, on peut remplacer $-\frac{1}{\cos\varphi}\partial_{\theta\theta} H^{12}$ par $\partial_\varphi f^1 + \partial_\theta f^2 + \partial_\varphi(\cos\varphi\, \partial_\varphi H^{12})$ si bien que :

$$\partial_\theta H^{22} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \left(\partial_\varphi f^1 + \partial_\varphi(\cos\varphi\, \partial_\varphi H^{12}) \right) d\varphi$$

c'est à dire :

$$\partial_\theta H^{22} = f^1 + \cos\varphi\, \partial_\varphi H^{12} - \cos\varphi_1 \left(\partial_\varphi H^{12} \right)_{|\gamma_1} - f^1_{|\gamma_1}.$$

Pour que H^{22} vérifie $(E1)$ il faudrait pouvoir imposer

$$\cos\varphi\, \partial_\varphi H^{12} \ + f^1 = 0 \text{ sur } \gamma_1,$$

or il y a déjà une condition de dirichlet sur cette partie du bord.

4 Conclusion

La méthode utilisée dans cette étude pour exploiter la formulation variationnelle (1) est très prometteuse dans le cas de géométries hyperboliques ou paraboliques et permet d'aboutir à des critères simples. Les forces doivent appartenir à des espaces connus et usuels pour être admissibles. Cela permet notamment de traiter les coques partiellement encastrées non concernées par les résultats obtenus dans [4]. Toutefois le cas des coques elliptiques partiellement encastrées reste pathologique à défaut d'être désespéré. On a en effet pour l'instant systématiquement procédé par conditions suffisantes larges.

References

[1] Chapelle, D., Bathe, K. J., *The Finite Element Analysis of Shells Fundamentals*, Computational Fluid and Solid Mechanics Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

[2] P. G.Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol. III. Theory of Shells*, Studies in Mathematics and Its Applications, Vol. 29 (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2000).

[3] P. G. Ciarlet and V. Lods, Asymptotic analysis of linearly elastic shells: "Generalized membrane shells", *J. Elasticity* **43**(2) (1996) 147-188.

[4] V. Lods and C. Mardare, Justification des modèles linéaires de Koiter et de Naghdi pour des coques totalement encastrées soumises des forces "non admissibles", C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I 333 (2001) 151-154.

[5] R. Luce, C. Poutous and J.-M. Thomas, Weakened conditions of admissibility of surface forces applied to linearly elastic membrane shells, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I 334 (2007) 721-726 .

[6] R. Luce, C. Poutous and J.-M. Thomas, Weakened conditions of admissibility of surface forces applied to linearly elastic membrane shells, Anal. Appl., Singap. 6, No. 3 (2008) 247-267.

[7] C. Poutous, Modélisation asymptotique et analyse numérique d'un problème de couplage fluide-structure, Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, (2006).

[8] J. Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia, *Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques,* (Masson, Paris, 1997).