

### 3. MODELAREA SISTEMELOR MECATRONICE. ANSAMBLUL MOTOR – MECANISM DE ACȚIONARE - SARCINĂ

#### 3.1 Modelarea sistemelor mecatronice

##### 3.1.1 Considerații generale

În baza exemplilor de sisteme mecatronice din cele mai diferite domenii, prezentate în capitolul 2, se poate trage concluzia, că aceste sisteme sunt caracterizate, indiferent de tipul și domeniul, mărimea și complexitatea lor, prin următoarele elemente (fig.3.1):

- Proprietăți mecanice;
- Proprietăți electromagnetice;
- Comportare termică;
- Electronică de putere, Senzori;
- Circuite și algoritmi de comandă și reglare.

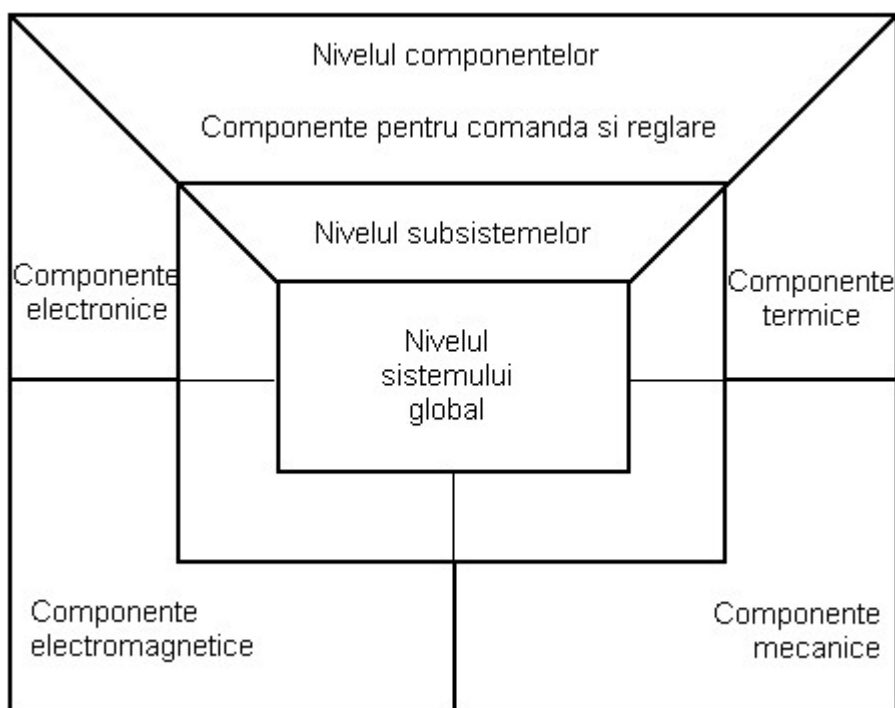


Fig.3.1 Structura multidisciplinară a unui sistem mecatronic [ZIR02]

##### 3.1.2 Analogii între sistemele mecanice și electrice

Subcapitolul își propune să evidențieze analogiile dintre sistemele mecanice și cele electrice și electronice, care permit abordarea unitară a celor două sisteme, dar și definirea unor mărimi de mare generalitate, care pot uni, într-un model general

componentele detaliate în figura 3.1 (inclusiv cele termice). Analogiile dintre sistemele mecanice și electrice se bazează pe faptul că modelele matematice ale acestora cuprind ecuații cu o structură similară, care pot fi deduse, în ambele cazuri, pe baza ecuațiilor lui Lagrange. Demonstrarea analogiilor se va realiza cu ajutorul sistemelor din figura 3.2 [PEL01].

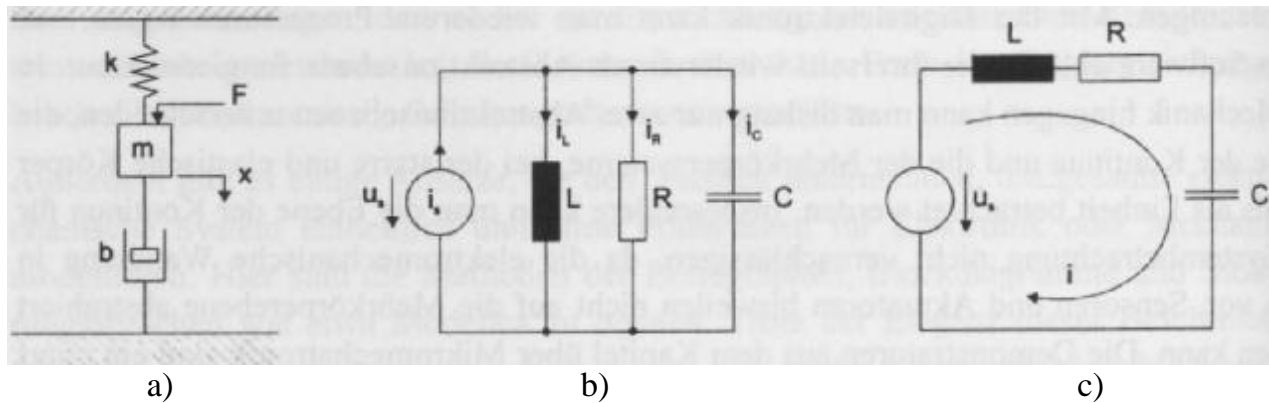


Fig.3.2 Sisteme mecanice și electrice, modelate cu ecuații similare

În figura 3.2, a este prezentat un sistem mecanic masă – resort – amortizor, a cărui funcționare poate fi descrisă cu ajutorul ecuației diferențiale:

$$F = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx. \quad (3.1)$$

Întrebarea care se pune, în continuare, este legată de mărimile mecanice și electrice care trebuie identificate pentru a obține ecuații similare cu (3.1) pentru cele două circuite analogice din figurile 3.2, b și 3.2, c. Considerând un punct material, în care este concentrată masa,  $m$ , ecuația (3.1) exprimă faptul că suma forțelor care acționează asupra acestui punct este egală cu zero, lucru care conduce cu gândul la prima lege a lui Kirchhoff, respectiv că suma curenților electrici dintr-un nod de rețea este egală cu zero. Pentru circuitul din figura 3.2, b se poate scrie ecuația:

$$i_s = i_L + i_R + i_C, \quad (3.2)$$

în care:

$$i_L = \frac{1}{L} \int u_s dt; \quad i_R = \frac{u_s}{R}; \quad i_C = C\dot{u}_s. \quad (3.3)$$

Din ecuațiile (3.2) și (3.3) rezultă:

$$i_s = \frac{1}{L} \int u_s dt + \frac{u_s}{R} + C\dot{u}_s. \quad (3.4)$$

Pentru a obține o ecuație similară cu (3.1) se face apel la legătura dintre tensiunea electrică și fluxul magnetic,  $\Psi$ , stabilită de legea inducției magnetice:

$$\dot{\Psi} = u_s, \tag{3.5}$$

obținându-se, în final, ecuația (3.6):

$$i_s = C \dot{\Psi} + \frac{1}{R} \Psi + \frac{1}{L} \Psi, \tag{3.6}$$

similară ca structură cu ecuația (3.1), în care curentul  $i_s$  al sursei este pus în corespondență cu forța excitatoare,  $F$ , capacitatea cu masa, inversa rezistenței electrice cu coeficientul de amortizare și inversa inductivității cu constanta elastică.

Circuitul analogic din figura 3.2, c, permite o abordare diferită, cu stabilirea altor analogii, respectiv între forțe și tensiuni și între viteze și curenți. A doua lege a lui Kirchhoff permite scrierea ecuației:

$$u_s = L \dot{i}_s + R i_s + \frac{1}{C} \int i_s dt. \tag{3.7}$$

Luând în considerare faptul că intensitatea curentului este derivata în raport cu timpul a sarcinii electrice,  $q$ , se poate scrie ecuația:

$$u_s = L \dot{q} + R q + \frac{1}{C} q, \tag{3.8}$$

care este, de asemenea, similară cu ecuația (3.1), dar în acest caz forța este pusă în corespondență cu tensiunea electrică a sursei, masa cu inductivitatea, factorul de amortizare cu rezistența electrică și constanta elastică cu inversa capacității.

Formulele (3.6) și (3.8) permit luarea în considerare a două tipuri de analogii cu sistemul mecanic modelat cu formula (3.1):

- *Analogia forță – curent electric*, are avantajul că menține structura sistemului mecanic, respectiv rețelele paralele rămân rețele paralele, iar cele serie rămân tot serie. Sunt aplicabile cele două legi ale lui Kirchhoff: forțele/curenții dintr-un nod, respectiv vitezele/tensiunile electrice dintr-un ochi de rețea au suma egală cu zero. Principalele relații, foarte interesante și instructive, care pot fi scrise, în baza acestei analogii pentru circuite electrice analogice și sisteme mecanice de translație și rotație sunt sintetizate în tabelul 3.1.
- *Analogia forță – tensiune electrică*. Nu are avantajele analogiei forță – curent electric, dar stă la baza mărimilor generalizate care vor fi prezentate în subcapitolul 3.1.3.

Tabelul 3.1 Relații de analogie între circuite electrice și sisteme mecanice [PEL01]

Circuite electrice analogice	Sisteme mecanice de translație	Sisteme mecanice de rotație
Curent electric I	Forță F	Moment M
Tensiune	Viteză	Viteză unghiulară

U	V	$\omega$
Bobină $u(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$	Resort $v(t) = \frac{1}{k} \cdot \frac{d}{dt} F(t)$	Arc de torsiune $w(t) = \frac{1}{k} \cdot \frac{d}{dt} M(t)$
Condensator $i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u(t)$	Inerție $F(t) = m \cdot \frac{d}{dt} v(t)$	Inerție $M(t) = J \cdot \frac{d}{dt} w(t)$
Rezistență $i(t) = \frac{1}{R} \cdot u(t)$	Amortizare $F(t) = b \cdot v(t)$	Amortizare $M(t) = b \cdot w(t)$
Consum de putere pe o rezistență $P(t) = u(t) \cdot i(t)$	Consum de putere datorită amortizării $P(t) = v(t) \cdot F(t)$	Consum de putere datorită amortizării $P(t) = w(t) \cdot M(t)$
Energie magnetică $E(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$	Energie elastică $E(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} \cdot F^2(t)$	Energie elastică $E(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} \cdot M^2(t)$
Energie electrostatică $E(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2(t)$	Energie cinetică $E(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(t)$	Energie cinetică $E(t) = \frac{1}{2} \cdot J \cdot w^2(t)$
Transformator $i_1 \cdot u_1 = i_2 \cdot u_2$ $i_1 = a \cdot i_2$ $u_1 = \frac{1}{a} \cdot u_2$	Pârghie $F_1 \cdot v_1 = F_2 \cdot v_2$ $F_1 = a \cdot F_2$ $v_1 = \frac{1}{a} \cdot v_2$	Angrenaj $M_1 \cdot w_1 = M_2 \cdot w_2$ $M_1 = a \cdot M_2$ $w_1 = \frac{1}{a} \cdot w_2$
Suma curenților dintr-un nod de rețea este zero	Suma forțelor care acționează asupra unui punct material este zero	Suma momentelor care acționează asupra unui punct material este zero
Suma tensiunilor dintr-un ochi este egală cu zero	Suma vitezelor relative dintr-un ochi este egală cu zero	Suma vitezelor unghiulare relative dintr-un ochi este egală cu zero

Limite semnificative în realizarea analogiilor dintre sistemele mecanice și electrice sunt determinate de:

- § Trecerea de la mecanica unidimensională la mecanica spațială. Problemele cinematice și dinamice ale roboților industriali, detaliate în capitolul 2, presupun mecanisme tridimensionale de poziționare și orientare a efectorului final, care nu își găsesc o corespondență în domeniul circuitelor electrice și electronice;
- § Toate ecuațiile din tabelul 3.1 presupun relații liniare între mărimile implicate, care nu corespund, în multe cazuri, fenomenelor reale. Astfel, legătura liniară dintre forța de frecare/momentul de frecare și viteza/viteza unghiulară, din cazul frecării vâscoase, nu mai este valabilă în cazul frecării coulombiene, unde intervine o relație neliniară între forța de frecare și forța normală.

### 3.1.3 Mărimi generalizate pentru componentele sistemelor mecatronice

#### 3.1.3.1 Efort și flux

O mărime generală, care stă la baza tuturor sistemelor: mecanice; electrice/electronice; termice; hidraulice/pneumatice, este energia, care poate fi de diferite feluri: mecanică; electrică; termică; chimică; nucleară. În sistemele mecatronice se utilizează, preponderent, energie mecanică, electrică și termică, dar și energie chimică, la motoarele cu combustie internă sau la actuatorii chimici (de exemplu, pentru umplerea airbag-urilor).

Puterea reprezintă energia în unitatea de timp. Puterile din tabelul 3.1 sunt exprimate ca produs a două mărimi. Se definește *puterea generalizată*, ca fiind produsul a două mărimi fizice, diferența de potențial sau efortul (effort), notat cu  $e$ , și fluxul (flow), notat cu  $f$ , denumite co-variabile ale puterii [ISE99]:

$$P(t) = f(t) \cdot e(t). \quad (3.9)$$

În categoria „efort” sunt incluse diferențele de potențial, măsurate între două puncte: tensiunea electrică, forța, momentul, diferența de presiune, iar în categoria „flux” mărimile măsurabile într-un singur punct: curent electric, viteză, debit volumetric (tabelul 3.2).

Tabel 3.2 Co-variabile la sisteme cu fluxuri de energie: clasificarea potențial-flux

Electric	Tensiunea electrică $U$	V	Curent electric $I$	A
Mecanic (translație)	Forța $F$	N	Viteză $v$	M/s
Mecanic (rotație)	Momentul $M$	Nm	Viteză unghiulară $\omega$	rad/s
Hidraulic	Diferența de presiune $p$	Pa = N/m <sup>2</sup>	Debit volumetric $dV/dt$	m <sup>3</sup> /s
Termodinamic	Temperatura $T$	K	Curent entropic $ds/dt$	W/K

Clasificarea potențial-flux este similară analogiei tensiune electrică–forță din exemplul prezentat în subcapitolul 3.1.2. Există și posibilitatea definirii co-variabilelor puterii pe baza analogiei curent electric–forță (ca în tabelul 3.1), sau a definirii altor co-variabile, al căror produs nu reprezintă o putere [ISE01], dar prezentul subcapitol nu își propune să intre în mai multe detalii, luând în considerare, în continuare, numai clasificarea potențial-flux.

Elementele care transmit energie pot fi reprezentate cu ajutorul dipolilor, cuadripolilor sau multipolilor (fig.3.3), la ale căror borne se regăsesc cele două mărimi: potențialul și fluxul. Stabilirea sensurilor săgeților se face de așa manieră, încât puterea transmisă la borne să corespundă sensului real de transfer. Dacă dipolul din figura 3.3, a, preia putere, fluxul  $f$  intră în sistem, iar săgeata corespunzătoare

diferenței de potențial este orientată de la borna de sus (al cărei potențial este mai mare) spre borna de jos. La surse de putere săgețile au sensuri opuse, iar la consumatorii de putere săgețile pentru potențial și flux au același sens.

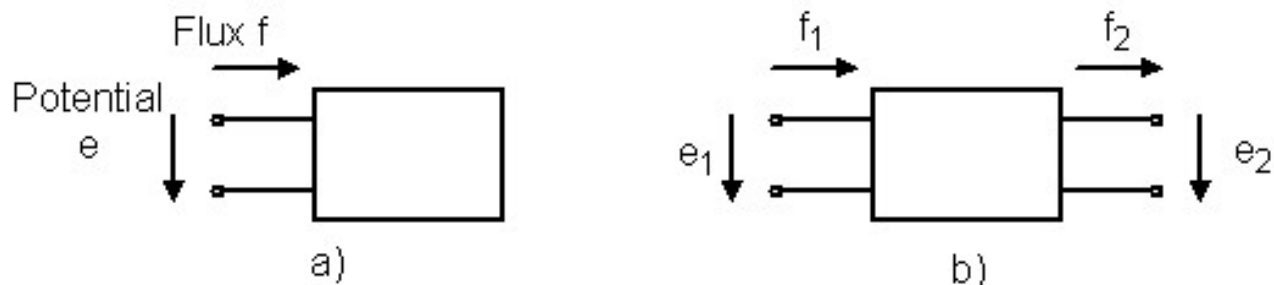


Fig.3.3 Dipoli și cuadripoli: a) Dipol ; b) Cuadripol

### 3.1.3.2 Grafuri Bond

Reprezentarea fluxurilor de putere cu ajutorul dipolilor, cuadripolilor și multipolilor stă la baza metodei care utilizează grafuri Bond (în engleză Bond Graph, dar și Bondgraph), introduse de profesorul H.M.Paynter în 1959. Este o reprezentare grafică, în care legăturile între poli sunt înlocuite cu „bond-uri” de energie, respectiv jumătăți de săgeți, al căror sens corespunde fluxului de energie. Deasupra săgeții se trece potențialul, iar sub săgeată fluxul, astfel încât puterea transmisă rezultă din produsul celor două mărimi. Teoria grafurilor Bond a fost dezvoltată ulterior de Karnopp, Rosenberg, Thoma, Breedveld etc., care au extins această tehnică de modelare în domeniul hidraulicii de putere, al mecatronicii, al sistemelor termodinamice, al electronicii și chiar sistemelor ne-energetice, ca economia.

Tabel 3.3

Grafuri Bond	Electrotehnică	Mecanică – translație	Mecanică – rotație
Potențial	Tensiune electrică	Forță	Moment
Flux	Curent electric	Viteză	Viteză unghiulară
Element C	Capacitate	Rigiditatea (tracțiune)	Rigiditate (torsioane)
Element I	Inductivitate	Inerție (masă)	Moment de inerție
Element R	Rezistență	Amortizare (translație)	Amortizare (rotație)
Transformator	Transformator	Pârghie	Angrenaj
Gyrator	Motor de c.c.		Giroscop

### Elemente standard ale grafurilor Bond [SAM01]

În grafurile Bond apar patru grupe de simboluri de bază:

- Trei elemente de bază pasive cu o poartă de tip R, C și I (vezi tabelul 3.3 și fig.3.4, a, b, c);
- Două elemente de bază active cu o poartă - sursele de potențial și flux (fig.3.4, d și e);
- Două elemente de bază cu două porți: transformatorul și „gyrator-ul”. Primul transmite un potențial sau un flux într-un raport fix sau variabil (vezi exemplele din tabelul 3.3), în timp ce al doilea realizează o legătură între potențialul de pe o

parte și fluxul de pe cealaltă parte. Un exemplu de gyrator este motorul de curent continuu.

- d. Două elemente cu 3 porți, care reprezintă, de fapt, conexiuni serie sau paralele (joncțiuni S, joncțiuni P).

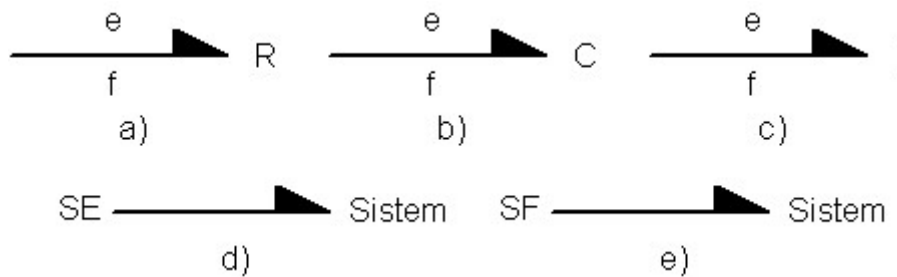


Fig.3.4 Elemente cu o singură poartă

**Elemente R.** Sunt rezistoarele, pentru care variabilele efort și flux sunt legate printr-o funcție statică. În general, un rezistor (o rezistență electrică, un amortizor mecanic, o rezistență hidraulică) consumă energie. Simbolul utilizat în grafuri Bond este cel din fig.3.4, a, pentru care jumătatea de săgeată îndreptată spre R specifică faptul că puterea (produsul dintre e și f) este pozitivă și intră în R. Relațiile de bază între e, f și R sunt:

$$e = R * f;$$

$$\text{Puterea} = e * f = R * f^2.$$

**Elemente C.** Sunt elemente cu o poartă, pentru care există o relație statică între efort și deplasare. Dispozitivele de acest tip, denumite capacitoare, înmagazinează și restituie, fără pierderi, energia: condensatoare electrice, arcuri, bare de torsiune, acumulatori fluidice, rezervoare gravitaționale etc. Simbolul utilizat în grafurile Bond este prezentat în figura 3.4, b.

Pentru un resort deformația (Q) și efortul (e) pot fi exprimate cu ajutorul relațiilor:

$$Q = \int_{-\infty}^t f \cdot dt, \quad e = k \cdot \int_{-\infty}^t f \cdot dt. \tag{3.10}$$

În acest caz fluxul este cauza, iar deformația (și deci și efortul) este consecința.

Pentru un condensator electric sarcina electrică (Q) înmagazinată de plăci și tensiunea electrică (e) au expresiile:

$$Q = \int_{-\infty}^t i \cdot dt, \quad e = C^{-1} \cdot \int_{-\infty}^t i \cdot dt. \tag{3.11}$$

În acest caz curentul este cauza, iar sarcina și tensiunea electrică sunt consecința.

**Elemente I.** Sunt denumite elemente inerțiale în terminologia grafurilor Bond și au la bază o relație statică între momentul, P, și fluxul, f. Elementele inerțiale sunt utilizate

pentru modelarea efectelor inductive în sistemele electrice și a efectelor inerțiale în sistemele mecanice sau fluidice. Simbolul utilizat este cel din figura 3.4, c.

În cazul sistemelor mecanice pot fi scrise ecuațiile:

$$P = \int_{-\infty}^t e \bullet dt, \quad f = m^{-1} \bullet \int_{-\infty}^t e \bullet dt. \quad (3.12)$$

În relațiile (3.12) efortul este cauza, iar viteza (și, deci, impulsul) este consecința.

În mod similar, curentul într-un inductor se obține cu relația:

$$i = L^{-1} \bullet \int_{-\infty}^t e \bullet dt. \quad (3.13)$$

**Sursele de efort (fig. 3.4, d) și de flux (fig.3.4, e)** sunt porți active. De exemplu, o forță sau o baterie ideală sunt considerate surse de efort într-un sistem mecanic, respectiv electric.

**Elemente de bază cu două porți.** Sunt două elemente cu câte două porți – *transformatorul*, notat cu *TF* și *gyratorul*, notat cu *GY*.

**Transformatorul** nu generează, nu înmagazinează și nu disipă energie, ci conservă puterea și o transmite, cu un factor de transformare adecvat.

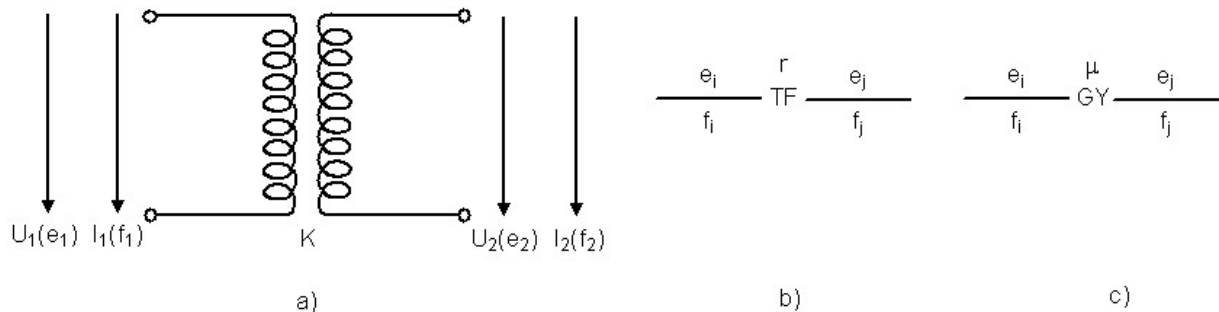


Fig. 3.5 Transformator și gyrator: a) transformator electric; b) simbolizarea unui transformator în grafuri Bond; c) simbolizarea unui gyrator în grafuri Bond

Rolul unui transformator poate fi înțeles cu ajutorul exemplului din figura 3.5. Pentru transformatorul ideal din figura 3.5, a, se pot scrie relațiile:

$$U_2 = k \bullet U_1 \text{ și } i_2 = (1/k) \bullet i_1, \quad (3.14)$$

Astfel încât:

$$U_1 \bullet i_1 = U_2 \bullet i_2.$$

Pentru modelul de transformator din grafurile Bond (fig. 3.5, b) se pot scrie relațiile:



$$f_j = r \bullet f_i \text{ și } e_j = (1/r) \bullet e_i, \tag{3.15}$$

și, în consecință:

$$e_j \bullet f_j = e_i \bullet f_i.$$

$r$  este modulul transformatorului, care poate fi o constantă, ca în relațiile (3.14) sau o expresie, de exemplu „b/a” pentru brațele unei pârghii.

**Gyratorul** (fig.3.5, c) realizează legături dintre flux și efort, respectiv efort și flux, conservând, la rândul lui, puterea:

$$e_j = \mu \bullet f_i; e_i = \mu \bullet f_j, \text{ respectiv, } e_i \bullet f_i = e_j \bullet f_j. \tag{3.16}$$

Un giroscop mecanic și un motor de curent continuu ideal se încadrează în această categorie. În cazul motorului de curent continuu, care va fi tratat în detaliu în capitolul 5, momentul motor este proporțional cu curentul electric, iar tensiunea contra-electromotoare este proporțională cu viteza unghiulară (vezi relațiile 5.13 – capitol 5). Un gyrator este utilizat, în general, pentru transferarea puterii dintr-o formă de energie în alta, de exemplu, din energie electrică sau hidraulică în energie mecanică, din energie electrică în energie magnetică etc.

**Joncțiuni – elemente cu 3 porți**

Fiecare element dintr-un graf Bond este legat la o structură de joncțiuni printr-un „bond” de energie. Există două tipuri de joncțiuni:

§ *Joncțiuni „1”* (fig.3.6), notate în literatura mai puțin recentă și cu litera *S* (sau *s*). Presupun fluxuri (curenți în domeniul electric și viteze/viteze unghiulare în domeniul mecanic) egale și eforturi a căror sumă algebrică este egală cu zero. Reprezintă un punct material în sistemele mecanice sau un circuit electric serie.

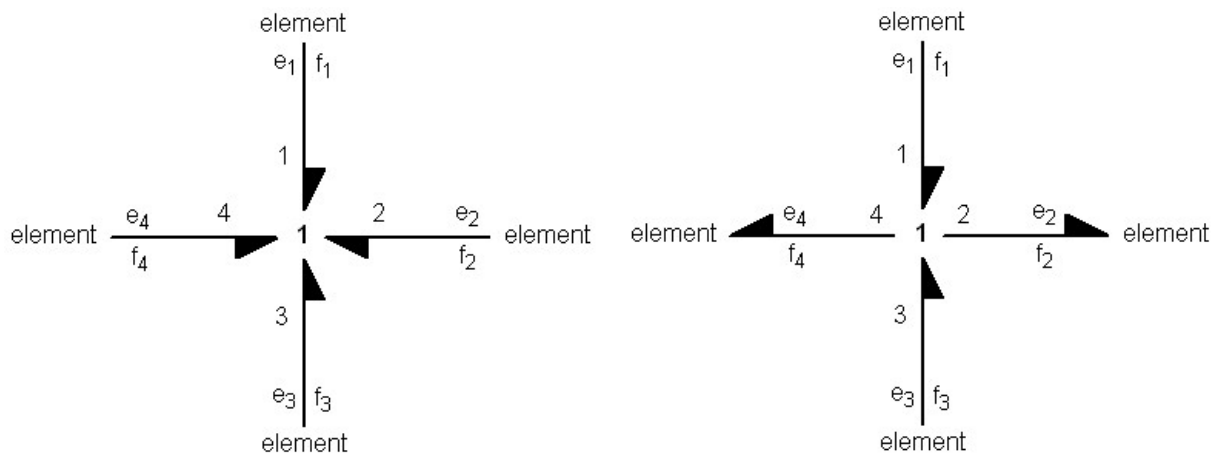


Fig.3.6 Joncțiuni „1”

Pentru figura 3.6, a, poate fi scrisă ecuația:

$$e_1 \bullet f_1 + e_2 \bullet f_2 + e_3 \bullet f_3 + e_4 \bullet f_4 = 0, \tag{3.17}$$

și întrucât fluxurile  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  și  $f_4$  sunt egale în joncțiunea „1”, rezultă:

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0.$$

Întrucât regula semnelor într-o relație de tipul (3.17) este determinată de sensul săgeților, considerându-se pozitiv în direcția joncțiunii, pentru joncțiunea din figura 3.6, b, termenii  $e_2 \bullet f_2$  și  $e_4 \bullet f_4$  vor avea semnul minus:

$$e_1 \bullet f_1 - e_2 \bullet f_2 + e_3 \bullet f_3 - e_4 \bullet f_4 = 0. \quad (3.18)$$

§ *Joncțiuni „0”* (fig.3.7), notate în literatura mai puțin recentă și cu litera *P* (sau *p*). Presupun eforturi (tensiuni în domeniul electric și forțe/momente în domeniul mecanic) egale și fluxuri a căror sumă algebrică este egală cu zero. Corespunde unui sistem mecanice serial sau unui nod într-un circuit electric.

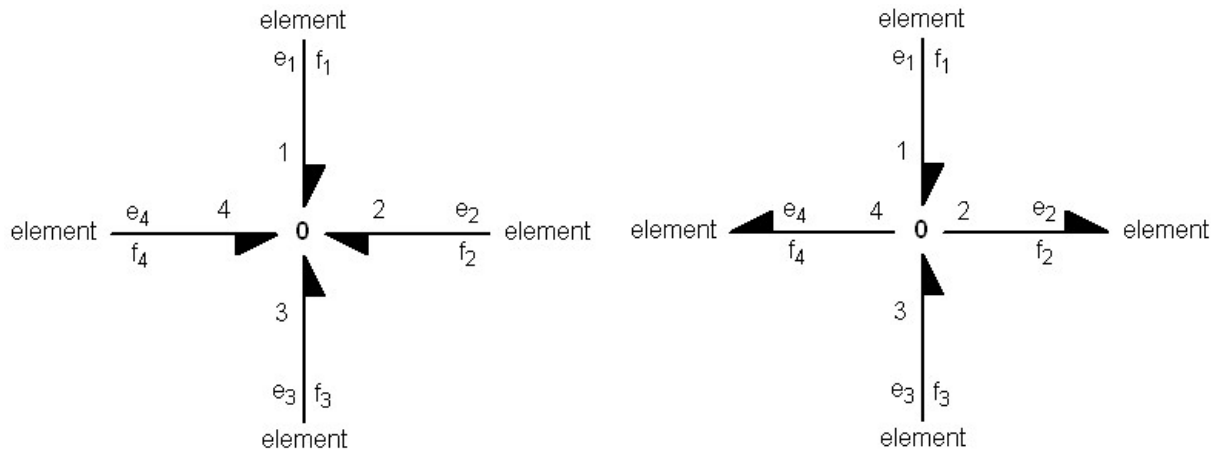


Fig.3.7 Joncțiuni „0”

Pentru joncțiunea din figura 3.7, a, suma algebrică a puterilor are o expresie similară cu (3.17), iar pentru joncțiunea din figura 3.7, b, relația pentru puteri este similară cu (3.18), iar întrucât o joncțiune „0” realizează o egalizare a eforturilor,  $e_1=e_2=e_3=e_4$ , rezultă, în final:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + f_3 + f_4 &= 0, \text{ pentru modelul din fig.3.7,a,} \\ f_1 - f_2 + f_3 - f_4 &= 0, \text{ pentru modelul din fig.3.7, b.} \end{aligned}$$

În figura 3.8, a este prezentat graful Bond, pentru un circuit electric cu transformator, care include atât o joncțiune „0” pentru circuitul paralel din primarul transformatorului, cât și o joncțiune „1” pentru circuitul serie din secundar. În figura 3.8, b sistemului mecanic cu transformator (pârghia), îi corespunde un graf Bond cu două joncțiuni „0”, în care elementele I reprezintă inerții mecanice, iar elementul C, rigiditatea resortului (constanta elastică – k).

Figurile 3.6, 3.7 și 3.8 aduc, ca un aspect nou, procedura de numerotare a săgeților, care poate fi realizată secvențial, începând cu numărul 1, fără a fi impuse, însă, reguli precise. Numerotarea permite identificarea elementelor și a joncțiunilor, constituind un mijloc eficient de evidență pentru majoritatea produselor software, care modelează sisteme mecatronice cu ajutorul grafurilor Bond. De exemplu, joncțiunea „0” din figura 3.8, a, poate fi identificată ca (P 1 2 5 6), iar joncțiunea „1”, din aceeași figură, ca (S 3 4 7). Înaintea numerelor săgeților pot fi plasate și semne, care indică sensul acestora în raport cu joncțiunea. Pentru identificarea celor două rezistoare din figură se pot folosi simbolurile R2 și R4 etc.

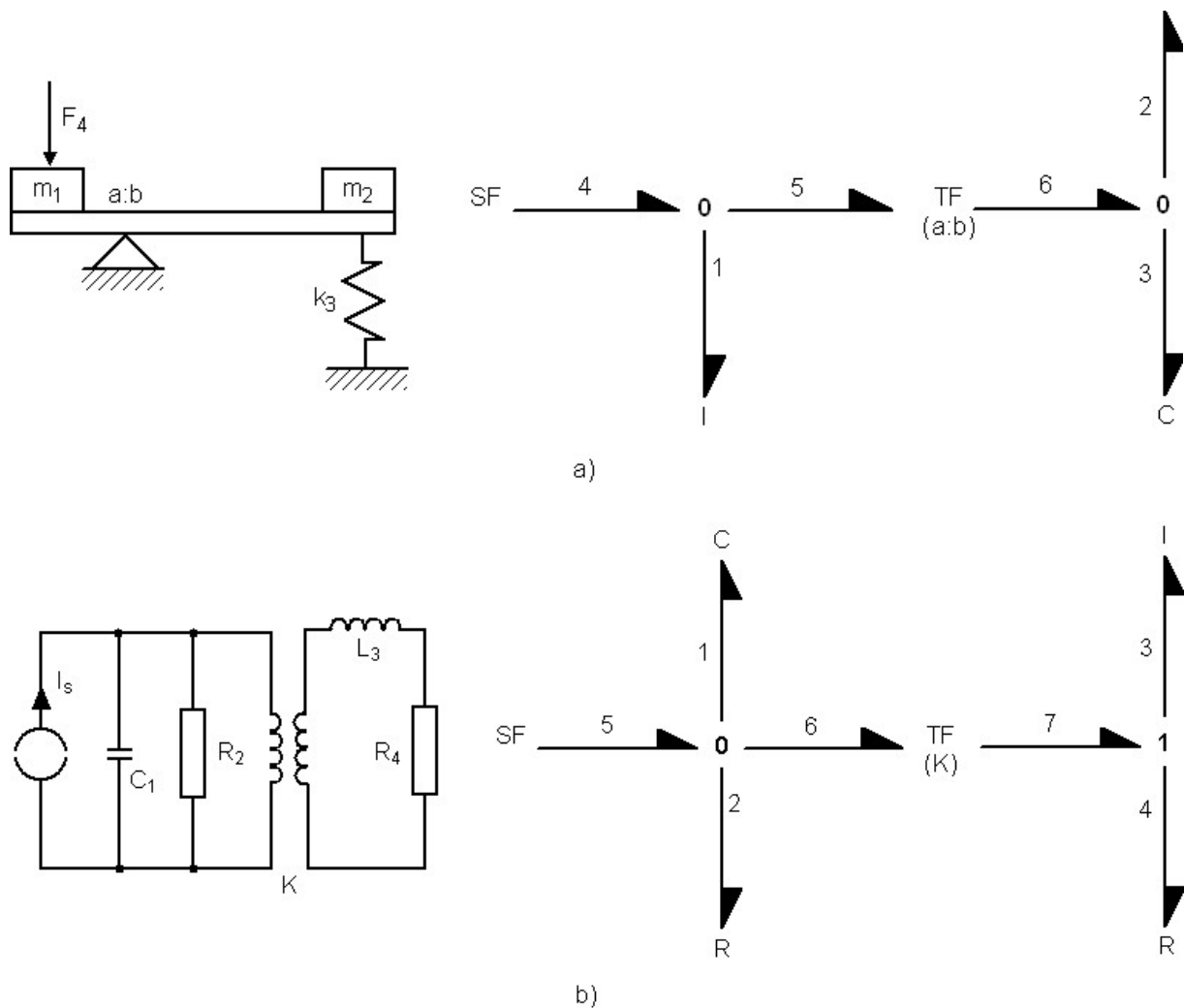


Fig.3.8 Grafuri Bond pentru sisteme cu transformator: a) electric; b) mecanic

Ultimele considerații legate de grafurile Bond se vor referi la un sistem mai complex, constituit dintr-un ansamblu motor de curent continuu – sarcină mecanică [AME03]. O schemă simplificată a sistemului este prezentată în figura 3.9, a, iar una mai detaliată în figura 3.9, b. Motorul de curent continuu, cu aspectele sale constructive, cu posibilitățile de reglare a turației și cu circuite integrate de comandă va fi tratat detaliat în capitolul 7, dar schemele și grafal Bond aferent pot fi înțelese în contextul noțiunilor care au fost detaliate în acest capitol.

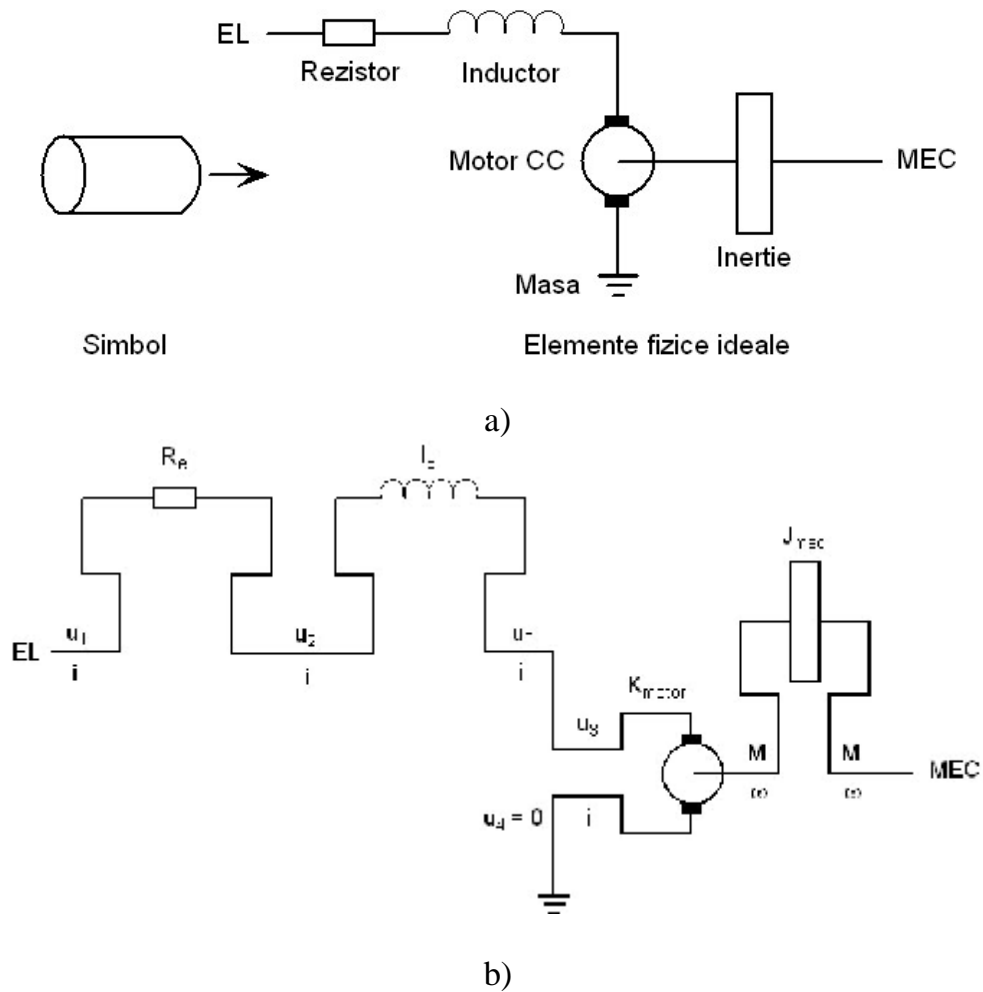


Fig.3.9 Simboluri și scheme pentru o acționare cu motor de curent continuu

Pe baza celor două scheme din figura 3.9 și a principiilor privind elaborarea grafelor Bond, prezentate anterior, se poate construi graful din figura 3.10, care cuprinde o joncțiune „1” pentru circuitul electric serie din înfășurarea motorului, un girator, cu constanta  $k_m$ , reprezentând motorul, care convertește energia electrică în energie mecanică de rotație și o joncțiune „1”, corespunzătoare sarcinii mecanice (MEC), cu momentul ei de inerție  $J_{mec}$ , redus la axul motorului.

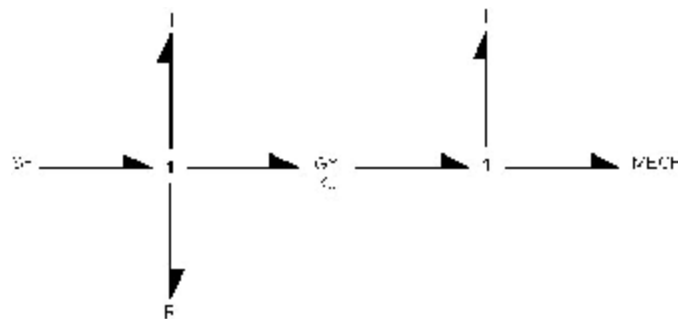


Fig. 3.10 Graf Bond pentru sistemul din figura 3.9

Pe baza grafurilor Bond, construite pentru un anumit sistem mecatronic, se poate realiza o determinare sistematică a ecuațiilor care modelează acel sistem, astfel încât aceasta poate fi algoritmică și efectuată de un mare număr de aplicații software existente: ENPORT, CAMP-G, SYMBOLS, COSMO, LorSim etc.

Ecuațiile diferențiale care descriu dinamica sistemului sunt exprimate în funcție de stările acestuia. Toate elementele de înmagazinare (I și C) corespund unor variabile de stare memorate (P pentru moment și Q pentru deplasare), iar ecuațiile sunt scrise pentru derivatele acestora în raport cu timpul (efort, respectiv flux). Scrierea ecuațiilor se realizează pe parcursul a 4 etape [SAM01], care nu vor fi detaliate, întrucât presupun o cunoaștere mai aprofundată a grafurilor Bond. Se vor prezenta, în schimb, unele amănunte privind două aplicații software care realizează modelarea și simularea sistemelor mecatronice cu ajutorul grafurilor Bond.

CAMP-G (Computer Aided Modeling Program with Graphical input) a fost dezvoltat pentru a genera automat modele cu ajutorul calculatorului și a fost integrat în MATLAB-SIMULINK, ca un instrument de simulare. Pornind de la un graf Bond, CAMP-G generează ecuații diferențiale de stare de ordinul I, funcții simbolice de transfer și funcții în cod sursă MATLAB, de tipul unor rutine cu extensiile .m sau .s, pe care SIMULINK le poate procesa [GRA02].

20-sim (citit „Twente Sim”) este un software de simulare, elaborat la Control Laboratory al Universității din Twente [AME03], ca instrument de proiectare a sistemelor mecatronice, fiind o continuare a pachetului TUTSIM, dezvoltat de același colectiv în anii 1970.

20-sim permite modelarea orientată pe obiecte. Porturile active și de semnale de intrare sau ieșire în/din sistem determină fiecare obiect. În interiorul unui obiect pot fi alte obiecte, nivelul inferior fiind reprezentat de ecuații.

## 3.2 Ansamblul motor – mecanism de acționare - sarcină

### 3.2.1 Considerații generale

Un element de bază al tuturor sistemelor mecatronice îl reprezintă ansamblul actor (motor/actuator) – mecanism de acționare – sarcină (fig.3.11). Complectat cu senzori și cu unitatea de comandă (hardware&software) configurează un subsistem mecatronic, întâlnit în toate exemplele care au fost detaliate în capitolul 2. În figura 3.11, a, sunt figurate și fluxurile de energie (sursă de energie → sistem de acționare → sarcină) și de informație (senzori → sistem de comandă → sistem de acționare).

Figura 3.11, b, prezintă o schemă de acționare a unei sarcini mecanice prin intermediul unui motor, de un anumit tip, între care se interpune, în cele mai multe

cazuri un mecanism de acționare cu rolul de a realiza o adaptare a parametrilor cinematici și dinamici ai motorului la cei ai sarcinii.

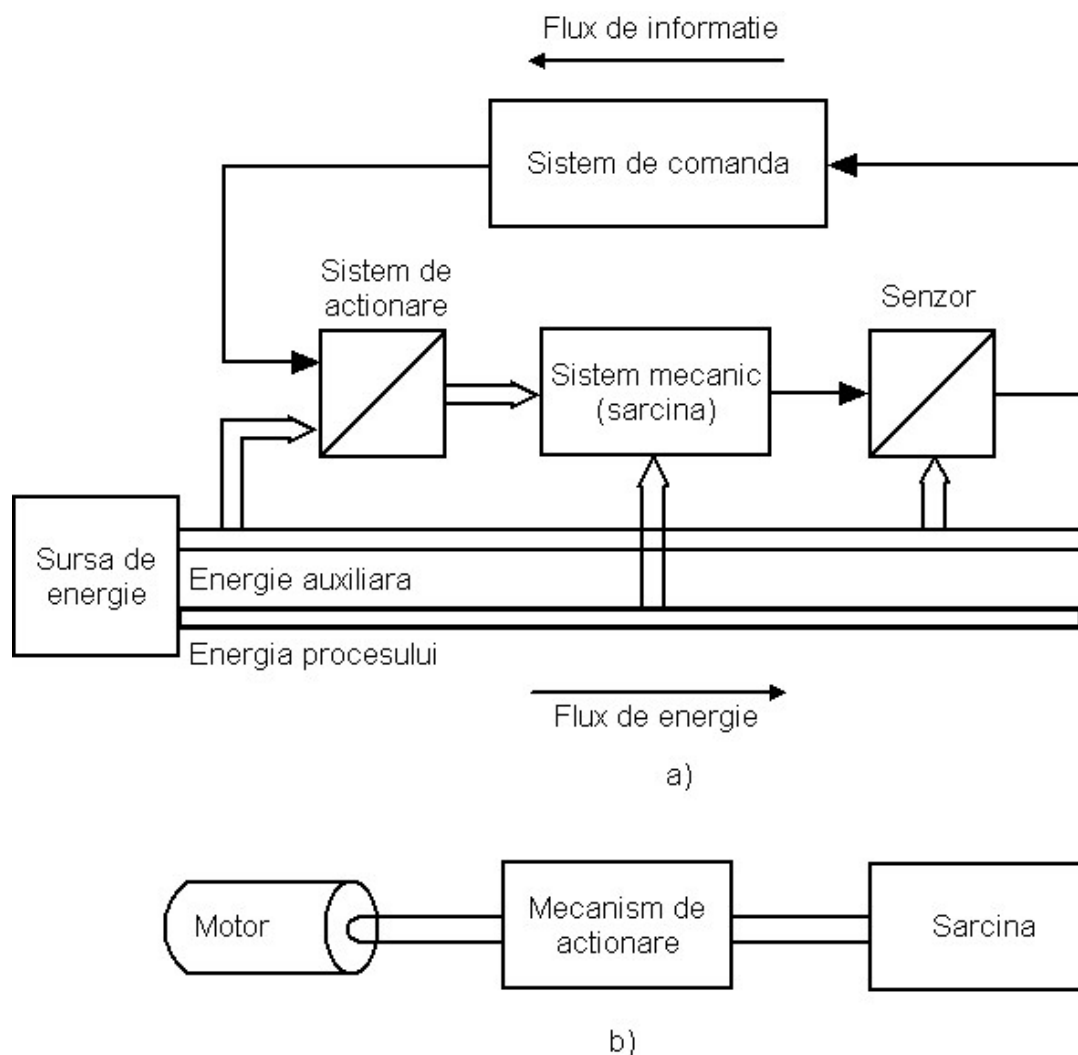


Fig.3.11 Schemă bloc a ansamblului motor – mecanism de acționare - sarcină

În capitolul 5 sunt prezentate câteva considerații privind termenii de *actor*, *motor*, *actuator*. Întrucât termenul de motor este mai familiar, în acest capitol se va folosi, generic, această denumire, fără ca acest lucru să afecteze generalitatea problemelor analizate.

Motoarele (actuatoarii) pot fi: electrice, hidraulice, pneumatice, mecanice, chimice și pot genera la tija/axul lor o mișcare de translație (motoare liniare) sau o mișcare de rotație (motoare rotative).

Mecanismele de acționare au câteva funcții importante:

- § Transmiterea mișcării de la motor la sarcină; toate mecanismele de acționare au acest rol, dar exemple mai spectaculoase sunt transmisiile cardanice sau cele cu arbori flexibili;
- § Adaptarea mișcării motorului la mișcarea sarcinii. Pot fi motoare rotative și sarcini cu mișcare de translație, între care trebuie să se interpună un mecanism

adecvat (șurub-piuliță, pinion-cremalieră, pinion-curea dințată etc.), sau motoare liniare și sarcini cu mișcare de rotație, între care se intercalează mecanisme de tip: cremalieră-pinion, cablu/curea dințată/lanț – roată/pinion/roată de lanț etc;

§ Adaptarea parametrilor cinematici și dinamici ai motorului (cursă, viteză/viteză unghiulară și forță/moment) la parametrii cinematici și dinamici ai sarcinii.

Întrucât mecanismul de acționare complică ansamblul și introduce erori, datorită jocurilor și deformațiilor elastice, proiectanții preferă, ca, acolo unde este posibil, sarcina să fie legată direct pe tija/axul motorului. Sunt „acționările directe = direct-drive”, uzuale în acționarea hidraulică/pneumatică sau cu anumite tipuri de actuatori electrici (electromagneți, actuatori piezoelectrice) a unor sarcini cu mișcare de translație, dar care, în cazul motoarelor electrice rotative, impun, în multe cazuri utilizarea unor motoare speciale, costisitoare, cu moment motor mare, numite „torque motors”.

Utilizarea unor mecanisme de acționare complică ansamblul motor – sarcină, datorită unor elemente care au mișcări diferite și la parametri cinematici diferiți de motor. Alegerea motorului și implementarea unor algoritmi de comandă corespunzători acestuia, impun raportarea tuturor elementelor cinematice și dinamice la axul motorului, prin intermediul unor ecuații de forma:

$$M_m = J_r \cdot \epsilon_m + M_{rr}, \quad (3.19)$$

pentru motoare rotative, respectiv:

$$F_m = m_r \cdot a_m + F_{rr}, \quad (3.20)$$

pentru motoare liniare.

Mărimile care apar în relațiile (3.19) și (3.20) au următoarele semnificații:

- §  $M_m$  - momentul dezvoltat de un motor rotativ la axul său de rotație;
- §  $J_r$  – momentul de inerție redus (resimțit) la axul motorului, în cazul accelerării tuturor maselor din sistem;
- §  $\epsilon_m$  – accelerația unghiulară dezvoltată de motor;
- §  $M_{rr}$  – momentul rezistent redus (resimțit) la axul motorului, corespunzător tuturor forțelor și momentelor rezistente și de frecare din sistem;
- §  $F_m$  - forța dezvoltată de un motor liniar la elementul (tija) de translație;
- §  $m_r$  – masa redusă (resimțită) la tija motorului, în cazul accelerării tuturor maselor din sistem;
- §  $a_m$  – accelerația liniară dezvoltată de motor;
- §  $F_{rr}$  – forța rezistentă redusă (resimțită) la axul motorului, corespunzătoare tuturor forțelor și momentelor rezistente și de frecare din sistem;

Elaborarea ecuațiilor de forma (3.19), respectiv (3.20), presupune rezolvarea a trei categorii de probleme:

- § Reducerea maselor/momentelor de inerție la tija/axul motorului;
- § Reducerea forțelor/momentelor rezistente din sistem la tija/axul motorului;
- § Alegerea unui profil adecvat de viteză a motorului și calculul accelerațiilor motoare, pe diferitele paliere ale profilului ales.

### 3.2.2 Reducerea maselor/momentelor de inerție

Calculul lui  $m_r$ , respectiv,  $J_r$ , presupune *scrierea unor ecuații de conservare a energiei cinetice*, de forma:

$$m_r \cdot \frac{v_r^2}{2} = \sum_j m_j \cdot \frac{v_j^2}{2} + \sum_i J_i \cdot \frac{W_i^2}{2} + \sum_k (m_k \cdot \frac{v_k^2}{2} + J_k \cdot \frac{W_k^2}{2}), \quad (3.21)$$

pentru motoare liniare, respectiv:

$$J_r \cdot \frac{W_r^2}{2} = \sum_j m_j \cdot \frac{v_j^2}{2} + \sum_i J_i \cdot \frac{W_i^2}{2} + \sum_k (m_k \cdot \frac{v_k^2}{2} + J_k \cdot \frac{W_k^2}{2}), \quad (3.22)$$

pentru motoare rotative.

Primul termen din partea dreaptă a ecuațiilor (3.21) și (3.22) reprezintă suma energiilor cinetice ale celor  $j$  elemente din sistem care au mișcări de translație, al doilea termen corespunde sumei energiilor cinetice ale celor  $i$  elemente ale sistemului cu mișcare de rotație, iar cel de-al treilea termen este echivalent cu suma energiilor cinetice ale celor  $k$  elemente cu mișcare plan-paralelă.

Din (3.21) și (3.22) se determină masa redusă,  $m_r$ , respectiv momentul de inerție redus,  $J_r$ :

$$\begin{aligned} m_r &= \sum_j m_j \cdot \left(\frac{v_j}{v_m}\right)^2 + \sum_i J_i \cdot \left(\frac{W_i}{W_m}\right)^2 + \sum_k (m_k \cdot \left(\frac{v_k}{v_m}\right)^2 + J_k \cdot \left(\frac{W_k}{W_m}\right)^2), \\ J_r &= \sum_j m_j \cdot \left(\frac{v_j}{W_m}\right)^2 + \sum_i J_i \cdot \left(\frac{W_i}{W_m}\right)^2 + \sum_k (m_k \cdot \left(\frac{v_k}{W_m}\right)^2 + J_k \cdot \left(\frac{W_k}{W_m}\right)^2), \end{aligned} \quad (3.23)$$

Din examinarea relațiilor (3.23) se poate trage concluzia că reducerea maselor /momentelor de inerție presupune împărțirea la pătratul rapoartelor de transmitere de forma  $(v_j/v_m)^2$ , respectiv  $(\omega_i/\omega_m)^2$ . De exemplu, dacă luăm în considerare o masă de rotație, acționată de un motor rotativ prin intermediul unui reductor armonic, cu raportul de transmitere,  $i=50$ , momentul de inerție corespunzător mesei, resimțit la axul motorului, va fi de  $50^2=2500$  de ori mai mic.

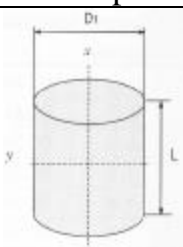
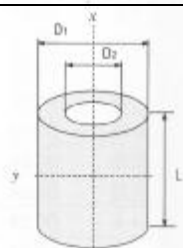
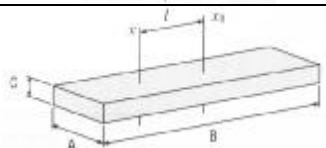
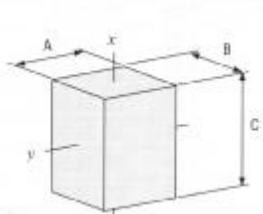
#### Aspecte practice privind calculul maselor și momentelor de inerție; exemple de reducere a maselor/momentelor de inerție

După stabilirea unor dimensiuni adecvate pentru elementele unui sistem de acționare: flanșe, coloane de ghidare, mase de translație etc. și alegerea mecanismelor de



acționare, urmează etapa calculului maselor, pentru elementele mobile cu mișcare de translație și a momentelor de inerție, pentru elementele mobile cu mișcare de rotație.

Tabel 3.4 Formule de calcul pentru mase și momente de inerție

Corp	Masă	Moment de inerție
	$m = (\rho\pi D_1^2 L)/4$	$J_x = mD_1^2/8$ $J_y = m(D_1^2/4 + L^2/3)/4$
	$m = \rho\pi(D_1^2 - D_2^2)L/4$	$J_x = m(D_1^2 + D_2^2)/8$ $J_y = m((D_1^2 + D_2^2)/4 + L^2/3)/4$
	$m = \rho ABC$	$J_x = J_{x0} + ml^2 =$ $= m(A^2 + B^2 + 12l^2)/12,$ unde l este distanța dintre axele x și x0
	$m = \rho ABC$	$J_x = m(A^2 + B^2)/12$ $J_y = m(B^2 + C^2)/12$

Tabelul 3.4 sintetizează formulele de calcul pentru câteva tipuri de corpuri care intervin în configurația sistemului mecanic, iar în tabelul 3.5 sunt date densitățile pentru o serie de materiale, care pot fi luate în considerare pentru confecționarea elementelor sistemului mecanic.

Tabel 3.5 Densități ale materialelor

Material	Densitate [kg/dm <sup>3</sup> ]
Aluminiu	2,72
Alamă	8,6
Bronz	8,17
Cupru	8,91
Plastic	1,11
Oțel	7,8
Lemn tare	0.8
Lemn moale	0.48

Calculul maselor se realizează, în general, la nivelul unor corpuri elementare de tip paralelipiped, cilindru, cilindru gol (țeavă). În ceea ce privește momentele de inerție, ele trebuie calculate, în majoritatea cazurilor, pentru corpuri cilindrice, unele cu diametre mai mici și lungimi mari (șuruburi), iar altele cu diametre mari și lungimi mici (role) (fig.3.12).

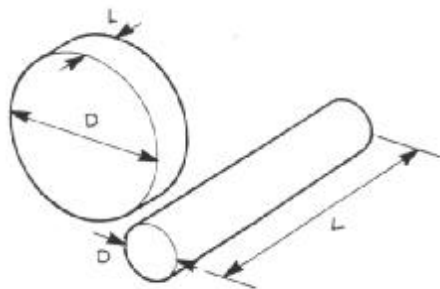


Fig.3.12 Corpuri cilindrice

Pentru toate aceste corpuri, momentul de inerție se calculează cu formula:

$$J_{cil} = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}r \frac{\rho D^2}{4} L \frac{D^2}{4}, \quad (3.24)$$

unde  $\rho$  reprezintă densitatea materialului din care este confecționat corpul cilindric.

Se vor prezenta câteva exemple de sisteme motor – mecanism de acționare - sarcină, cu motoare electrice rotative (în toate exemplele se iau în considerare motoare pas cu pas – MPP), în care apar câteva dintre mecanismele de acționare utilizate frecvent în construcția sistemelor mecatronice:

- § Mecanisme cu transmitere tangențială a mișcării: cu pinion – curea dințată; cu pinion –cremalieră; cu roată cu fricțiune etc.
- § Cu mecanism șurub-piuliță;
- § Cu reductor.

În figura 3.13 este prezentată o sarcină cu mișcare de translație, acționată de un MPP, prin intermediul unui mecanism cu transmitere tangențială a mișcării. Reducerea maselor sarcinii și curelei la axul MPP se bazează pe relațiile:

$$\frac{J_{rm} \cdot \omega_m^2}{2} = \frac{(m_L + m_b) \cdot v_L^2}{2} \quad (3.25)$$

și

$$v_L = \omega_m \cdot r_{pin}. \quad (3.26)$$

În relațiile (3.25) și (3.26) s-au folosit următoarele notații:

§  $J_{rm}$  – momentul de inerție aferent maselor în mișcare de translație, redus la axul MPP;

§  $m_L$  – masa sarcinii ( $L \approx \text{Load}$ );

§  $m_b$  – masa curelei ( $b \approx \text{belt}$ );

§  $v_L$  – viteza sarcinii.

Pe baza celor două relații (3.25) și (3.26) se obține formula de calcul a momentului de inerție, echivalent maselor în mișcare de translație, care este resimțit la nivelul axului MPP:

$$J_{rm} = (m_L + m_b) \cdot r_{pin}^2 = r_{pin}^2 \sum m_i. \quad (3.27)$$

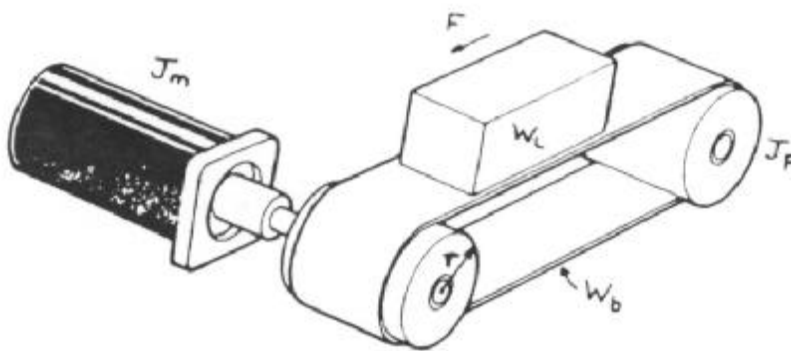


Fig. 3.13 Acționare cu MPP și mecanism cu transmitere tangențială a mișcării

Momentul de inerție  $J_r$ , resimțit la axul motorului va fi:

$$J_r = J_{rm} + 2J_p,$$

unde cu  $J_p$  s-a notat momentul de inerție al unui pinion, antrenat în mișcare de rotație, cu viteza unghiulară,  $\omega_m$ , a MPP.

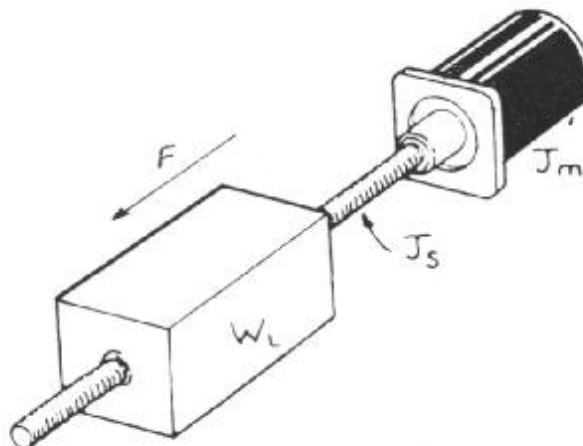


Fig.3.14 Acționare cu MPP și mecanism șurub-piuliță

În figura 3.14 este prezentată o sarcină cu mișcare de translație, acționată de un MPP, prin intermediul unui mecanism șurub-piuliță cu pasul  $p$ . Reducerea maselor, care execută o mișcare de translație (piuliță, sarcină etc.), la axul MPP se bazează pe relațiile:

$$\frac{J_{rm} \cdot \omega_m^2}{2} = \frac{m_L \cdot v_L^2}{2} \quad (3.28)$$

și:

$$v_L = \omega_m \cdot \frac{p}{2p} \quad (3.29)$$

Relația (3.29) derivă din relația:

$$d_L = q_m \cdot \frac{p}{2p},$$

care exprimă deplasarea,  $d_L$ , a sarcinii, în funcție de rotația cu unghiul  $\vartheta_m$  a axului MPP, solidar cu șurubul mecanismului.

Pe baza relațiilor (3.28) și (3.29) se obține formula de calcul a momentului de inerție, echivalent maselor în mișcare de translație, care este resimțit la nivelul axului MPP:

$$J_{rm} = m_L \cdot \left(\frac{p}{2p}\right)^2 = \left(\frac{p}{2p}\right)^2 \sum_i m_i \quad (3.30)$$

În relația (3.30),  $\sum m_i$ , reprezintă suma tuturor maselor, antrenate de mecanismul respectiv într-o mișcare de translație.

Momentul de inerție  $J_r$ , resimțit la axul motorului va fi:

$$J_r = J_{rm} + J_{\text{șur}} = J_{rm} + m_{\text{șur}}(\pi d_{\text{șur}}^2/8)$$

unde cu  $J_{\text{șur}}$  s-a notat momentul de inerție al șurubului cu diametrul  $d_{\text{șur}}$  și masa  $m_{\text{șur}}$ , antrenat în mișcare de rotație, cu viteza unghiulară,  $\omega_m$ , a MPP.

Figura 3.15 prezintă o sarcină cu mișcare de translație, acționată de un MPP cu reductor, prin intermediul unui mecanism șurub cu bile (Ball Screw)-piuliță cu pasul  $p$ . Există o gamă largă de MPP, cu un reductor încorporat în carcasa acestora (MPP de tip "Geared Motors"), cu rapoarte de transmitere în domeniul 2:1, 3:1, 5:1, 10:1. Momentele de inerție ale elementelor reductorului (cum ar fi  $J_1$  și  $J_2$  în figura 3.15), reduse la axul MPP, sunt integrate în momentul de inerție,  $J_m$ , al MPP, furnizat de cataloagele de firmă.

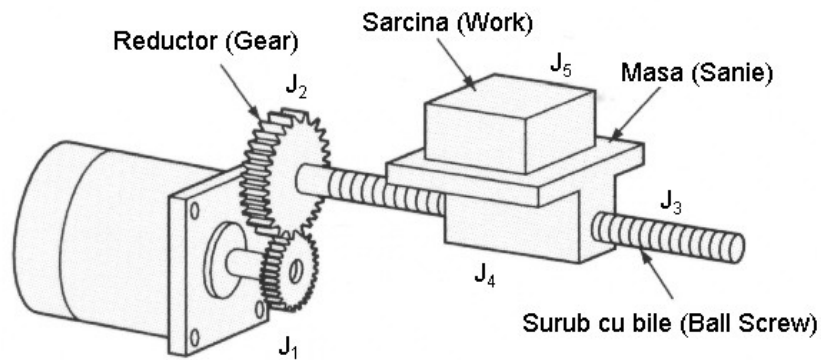


Fig.3.15 Acționare cu MPP cu reductor și mecanism șurub-piuliță

În cazul sistemului de acționare din figura 3.15, momentul de inerție echivalent tuturor elementelor (piuliță=masă=Table, sarcină=Work, șurub) de pe axul șurubului, redus la axul MPP, va avea expresia:

$$J_r = (J_{rm} + J_{\text{șur}})/i^2.$$

Cu,  $i$ , s-a notat raportul de transmitere al reductorului, respectiv raportul dintre viteza unghiulară,  $\omega_m$ , a MPP și viteza unghiulară,  $\omega_L$ , a șurubului.

### 3.2.3 Reducerea forțelor/momentelor

Ansamblul mecanism de acționare-sarcină este supus la o serie de forțe/momente rezistente (forțe/momente utile pentru efectuarea operațiilor de lucru, forțe/momente de frecare etc.). Efectul acestor forțe/momente, care acționează de-a lungul lanțului cinematic, trebuie cuantificat sub forma unor componente de forță, raportate la tija unui motor liniar, sau sub forma unor componente de moment, raportate la axul unui motor rotativ, în scopul determinării forțelor/momentelor pe care motorul trebuie să le dezvolte pentru a asigura deplasările impuse prin programul de comandă, în condițiile întâmpinării acelor rezistențe.

Dacă în cazul reducerii forțelor/momentelor de inerție, calculul se bazează pe scrierea unor ecuații de conservare a energiilor cinetice, **în cazul reducerii forțelor/momentelor, calculele se bazează pe scrierea unor ecuații de conservare a lucrurilor mecanice elementare, respectiv a puterilor:**

$$\begin{aligned} F_r \cdot v_m &= \sum_i F_i \cdot v_i + \sum_k M_k \cdot w_k \\ M_r \cdot w_m &= \sum_i F_i \cdot v_i + \sum_k M_k \cdot w_k. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Prima sumă cuantifică efectul unor forțe rezistente, iar cea de-a doua sumă, pe cel al unor momente rezistente, care acționează asupra diferitelor elemente ale ansamblului mecanism de acționare-sarcină. Pentru a nu complica lucrurile, forțele și deplasările corespunzătoare s-au considerat coliniare ( $\cos(\mathbf{F}_i, \mathbf{s}_i) = 0$ ), iar puterile corespunzătoare elementelor cu mișcare plan-paralelă au fost incluse în cele două sume din partea dreaptă a relațiilor (3.31). Din (3.31) se obțin formulele pentru calculul forțelor /momentelor reduse la axul motorului:

$$\begin{aligned} F_r &= \sum_i F_i \cdot \frac{v_i}{v_m} + \sum_k M_k \cdot \frac{w_k}{v_m}; \\ M_r &= \sum_i F_i \cdot \frac{v_i}{w_m} + \sum_k M_k \cdot \frac{w_k}{w_m} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Analizând relațiile (3.32), se constată că reducerea forțelor /momentelor presupune împărțirea cu raportul de transmitere de forma ( $v_i/v_m$ ), respectiv ( $w_i/w_m$ ). De exemplu, dacă luăm în considerare o masă de rotație, acționată de un motor rotativ prin intermediul unui reductor armonic cu raportul de transmitere,  $i=50$ , un moment rezistent care acționează asupra mesei va fi resimțit la axul motorului cu o valoare de 50 de ori mai mică.

În cazul modulelor cu mecanism cu transmitere tangențială a mișcării (fig.3.13), ecuația (3.32), care ia în considerare efectele unor forțe rezistente, conduce la:

$$M_r = \sum_i F_i \cdot \frac{v_i}{w_m} = \sum_i F_i \cdot r_{pin}. \quad (3.33)$$

Pentru un mecanism șurub-piuliță intercalat între motor și sarcină (fig.3.14), ecuația (3.32) permite determinarea momentului necesar pentru compensarea efectelor unor forțe rezistente,  $F_i$ :

$$M_r = \sum_i F_i \cdot \frac{v_i}{w_m} = \sum_i F_i \cdot \frac{p}{2p} \quad (3.34)$$

Cu ajutorul relației (3.34) pot fi determinate următoarele componente ale momentului redus la axul MPP [THK]:

$$M_{Lr} = \frac{F_L \cdot p}{2p \cdot h}, \quad (3.35)$$

este componenta pentru asigurarea forței  $F_L$  și ține cont de randamentul,  $\eta \approx 0.9$ , al mecanismului șurub cu bile-piuliță.

$$M_{Pr} = k \cdot \frac{F_{ao} \cdot p}{2p},$$

este momentul de frecare, determinat de forța de pretensionare,  $F_{ao}$ , a piuliței;  $k$  ( $0,1 \div 0,3$ ) este coeficientul intern de frecare a piuliței pretensionate.

$$M_{fr} = \frac{mF_N \cdot p}{2p}, \quad (3.36)$$

este componenta datorată frecărilor din ghidaje. Cu  $F_N$  s-a notat forța de reacțiune normală dintre bucși și coloane de ghidare (egală, în principiu cu suma greutateilor, care se sprijină pe ghidaje), iar cu  $\mu$  ( $\approx 0.01$ ), coeficientul de frecare din ghidajele cu bile.

Dacă între motor și mecanismul de acționare se interpune un reductor, cu raportul de transmitere  $i$ , toate componentele momentelor reduse la axul motorului, trebuie împărțite la  $i$ .

### 3.2.4 Stabilirea profilurilor de viteză și determinarea vitezelor și a accelerațiilor

În ecuațiile (3.19) și (3.20), intervin, pe lângă mase/momente de inerție și forțe/momente și accelerațiile, liniare sau unghiulare,  $a_m$ , respectiv,  $\varepsilon_m$ , dezvoltate de motor. Determinarea și controlul acestora presupune luarea în considerare a unui profil de viteză adecvat, care trebuie impus motorului și pe baza căruia se determină și accelerațiile, pe diferitele intervale de timp, și deplasările. Alegerea unui anumit profil este determinat, pe de o parte, de performanțele și exigențele impuse sistemului acționat, iar, pe de altă parte, de posibilitățile și limitele motorului folosit.

În cazul multor sisteme mecatronice (roboți, automate de control și servire, mașini unelte cu comandă numerică), cerințele pentru productivități mari impun timpi de poziționare cât mai mici, deci accelerații și viteze mari. Apar însă limitări ale acestei tendințe, determinate de:

- § Necesitatea protejării obiectelor manipulate;
- § Limitarea solicitărilor elementelor mecanismelor de acționare;
- § Evitarea unor șocuri și salturi, determinate de variația bruscă a accelerației etc.

Chiar dacă scopul tinde, întotdeauna, spre timpi de poziționare cât mai mici, soluțiile concrete sunt influențate de aplicațiile practice și de tipul acționărilor utilizate [LAI01]:

- § La mașinile unelte și alimentatoare distanțele de poziționare pot fi mari, de ordinul unui număr mare de metri. La roboți industriali, manipolatoare, mașini de ambalat distanțele sunt în limita a circa 2 m. La echipamente periferice de calculator (imprimante, scannere, unități floppy sau CD-ROM) sunt de ordinul sutelor sau zecilor de mm;
- § Viteza maximă,  $v_{max}$ , este limitată de concepția constructivă a motorului (actuatoarei), care are o limită maximă de viteză și, eventual, de limitele impuse de mecanismul de acționare utilizat. La mașini unelte sunt necesare viteze de 1 – 2 m/s, iar la roboți și automate de servire și montaj, viteze de până la 5 m/s;
- § Accelerația maximă,  $a_{max}$ , este stabilită, odată cu alegerea motorului. Pentru reducerea timpilor neproductivi se impun accelerații de 5-10 m/s<sup>2</sup> la mașini

unelte, de până la  $50 \text{ m/s}^2$  la roboți și manipolatoare, în condițiile unor sarcini mai mici, și chiar mai mari de  $50 \text{ m/s}^2$  la automate de servire și montaj;

- § Evitarea șocurilor prin limitarea variațiilor de accelerație; se impune mai ales în situațiile în care trebuie protejate elementele sistemului de acționare și obiectele manipulate.

Se vor trece în revistă trei tipuri de profiluri de viteză, două mai simple – profilul triunghiular și profilul trapezoidal, delimitate de segmente de dreaptă și unul mai complex – profilul parabolic, definit cu ajutorul unor formule matematice, și se va face o analiză comparativă a acestora pentru un ciclu de poziționare similar.

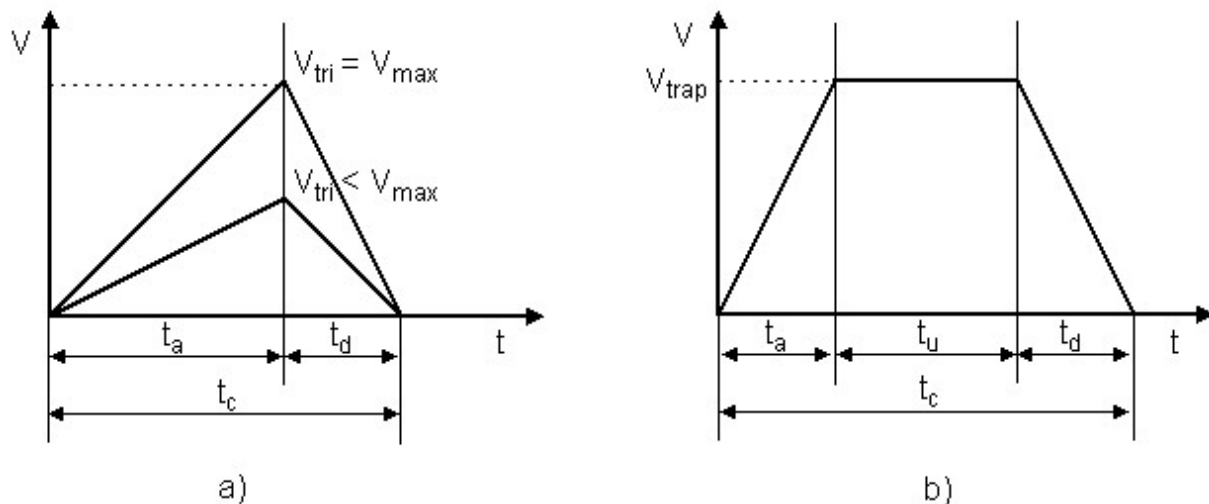


Fig.3.16 Profiluri de viteză: a) triunghiular; b) trapezoidal

În figura 3.16 sunt prezentate 2 diagrame utilizate frecvent:

- § diagrama cu profil trapezoidal (fig.3.16, a), care presupune o accelerație până la o viteză maximă,  $v_{trap}$ , pe parcursul unui interval de accelerație,  $t_a$ , urmată de mersul uniform, pe durata  $t_u$ , cu viteza atinsă la sfârșitul perioadei de accelerație și, apoi, de o decelerație (frânare), pe durata,  $t_d$ , până la oprire (viteză zero).
- § diagrama cu profil triunghiular (fig.3.16, b), cuprinde numai două paliere, cel de accelerație până la o viteză maximă,  $v_{tri}$ , pe parcursul unui interval de accelerație,  $t_a$ , urmat imediat de o decelerație (frânare), pe durata,  $t_d$ , până la oprire (viteză zero).

Profilul triunghiular este considerat, în majoritatea cazurilor, ca un caz particular al profilului trapezoidal, pentru care, datorită timpului de poziționare foarte scurt, sistemul de acționare nu poate atinge viteza maximă, lipsind astfel palierul cu viteză constantă.

Pentru scopul propus, de analiză comparativă a celor două profiluri, se va analiza un caz particular (fig.3.17) al diagramelor de viteză din fig.3.16. Elementele comune celor două tipuri de diagrame vor fi considerate unghiul,  $\theta_m$ , cu care se rotește axul motorului (presupus rotativ) pentru realizarea întregii mișcări, și timpul,  $\tau$ , impus pentru realizarea unui ciclu de poziționare. Pentru profilul trapezoidal se consideră că



timpii pentru cele trei faze: accelerare, mers uniform și decelerație sunt egali cu  $\tau/3$ , iar pentru profilul triunghiular,  $t_a = t_d = \tau/2$ .

Pe baza unor calcule cinematice foarte simple se pot deduce, cu ușurință, relațiile redată în continuare (cea mai simplă ipoteză, care poate conduce la calculul vitezelor unghiulare, este aceea că suprafața închisă de fiecare diagramă este egală cu  $\theta_m$ ).

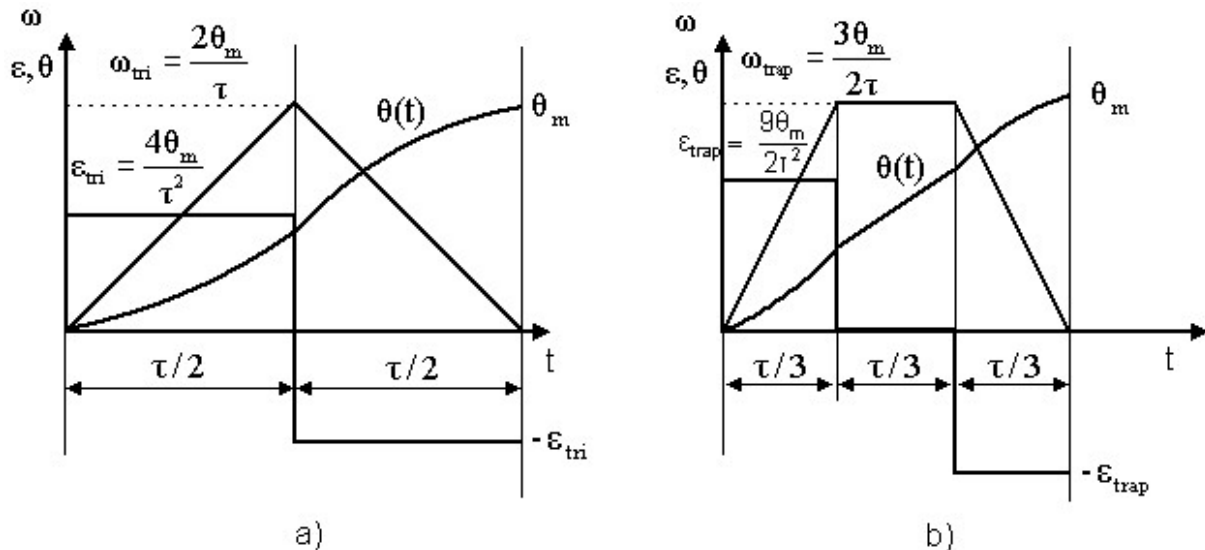


Fig. 3.17 Diagrame de viteză triunghiulare și trapezoidale pentru analiza comparativă

§ Pentru profilul triunghiular:

$$w_{tri} = \frac{2q_m}{t};$$

$$e_{tri} = \frac{w_{tri}}{t} = \frac{4q_m}{t^2},$$
(3.37)

§ Pentru profilul trapezoidal:

$$w_{trap} = \frac{3q_m}{2t};$$

$$e_{trap} = \frac{w_{trap}}{t} = \frac{9q_m}{2t^2},$$
(3.38)

În anumite situații exigențele unui sistem de poziționare impun luarea în considerare a unor ecuații și profiluri de viteză mai complexe, care să ofere o flexibilitate mai mare în privința realizării unor parametri optimi. În figura 3.18, a, este prezentat un profil de

viteză parabolic și se va presupune că servește la poziționarea cu unghiul  $\theta_m$  pe parcursul timpului  $\tau$ .

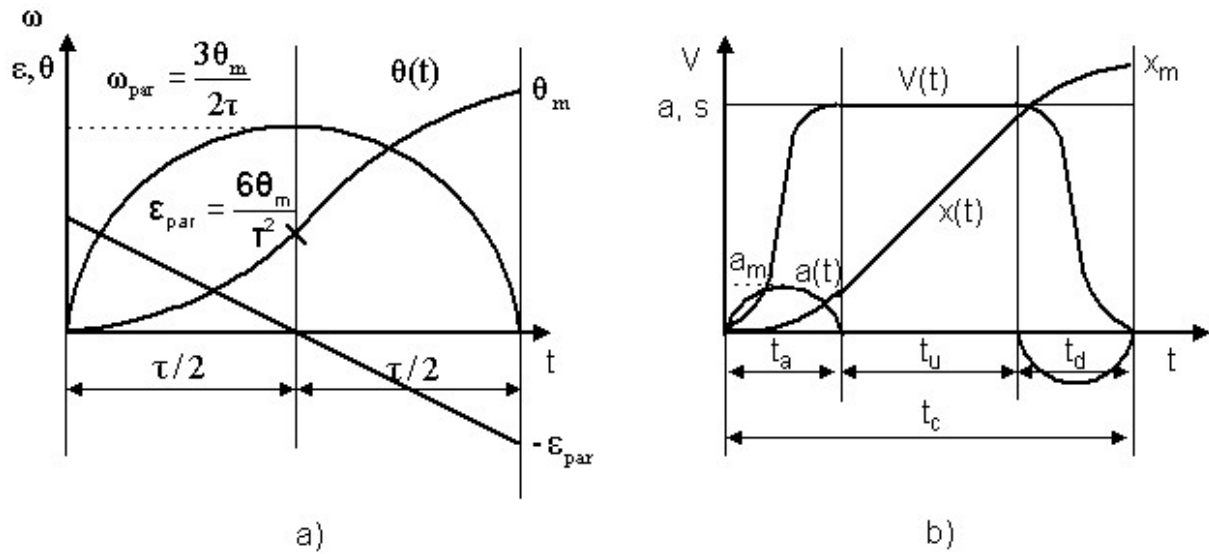


Fig.3.18 Profiluri de viteză: a) parabolic; b) viteza proporțională cu  $(\sin \omega t)^2$

Studiul pornește de la ecuația generală a parabolei (vitezei unghiulare):

$$\omega(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t, \quad (3.39)$$

pe baza căreia se deduce accelerația unghiulară:

$$\varepsilon(t) = d\omega/dt = 2a \cdot t + b, \quad (3.40)$$

respectiv, variația acesteia în raport cu timpul:

$$d\varepsilon/dt = 2a = \text{constant}.$$

Pentru determinarea celor două constante, a și b, se impun următoarele condiții:

$$\omega(\tau) = 0 \rightarrow a \cdot \tau^2 + b \cdot \tau = 0 \rightarrow b = -a \cdot \tau \quad (3.41)$$

și:

$$\int_0^{\tau} (a \cdot t^2 + b \cdot t) \cdot dt = \theta_m \rightarrow \frac{a \cdot \tau^3}{3} + \frac{b \cdot \tau^2}{2} = \theta_m. \quad (3.42)$$

Sistemul de ecuații (3.41) și (3.42) conduce la soluțiile:

$$a = -\frac{6\theta_m}{\tau^3}; \quad b = \frac{6\theta_m}{\tau^2},$$

care se înlocuiesc în (3.39) și (3.40):

$$\begin{aligned} \omega(t) &= -\frac{6\theta_m}{\tau^3} t^2 + \frac{6\theta_m}{\tau^2} t; \\ \varepsilon(t) &= -\frac{12\theta_m}{\tau^3} t + \frac{6\theta_m}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Valoarea maximă a vitezei unghiulare se obține pentru  $t = \tau/2$ , iar cea a accelerației unghiulare pentru  $t = 0$ :

$$\omega_{\text{par}} = \omega(\tau/2) = \frac{3\theta_m}{2\tau}; \quad \varepsilon_{\text{par}} = \varepsilon(0) = \frac{6\theta_m}{\tau^2}. \quad (3.44)$$

Calculul lui  $\omega_m$  și  $\varepsilon_m$  se face impunând timpi,  $\tau$ , cât mai mici, pentru realizarea curselor maxime,  $L$ . Pentru mecanisme cu șurub-piuliță (fig.3.14),  $\theta_m$ , se obține cu relația:

$$\theta_m = \frac{L}{p} \cdot 2\pi \quad [\text{rad}], \quad (3.45)$$

iar pentru mecanisme cu transmitere tangențială a mișcării:

$$q_m = i \cdot \frac{L}{2p \cdot r_{\text{pin}}} \cdot 2p = i \cdot \frac{L}{r_{\text{pin}}} \quad [\text{rad}]. \quad (3.46)$$

Relația (3.45) ține cont de faptul că, la o rotație completă, cu  $2\pi$  radiani a axului motorului, sarcina translatează cu pasul,  $p$ , al șurubului, iar relația (3.46) are la bază faptul că o rotație completă, cu  $2\pi$  radiani a axului motorului, determină înaintarea sarcinii cu o circumferință,  $2\pi \times r_{\text{pin}}$  a pinionului. Totodată, în cazul mecanismelor cu transmitere tangențială s-a considerat un motor cu reductor, cu raport de transmitere,  $i$ , pentru obținerea unei rezoluții acceptabile pentru deplasarea sarcinii.

În figura 3.18, b, este prezentat un profil de viteză, care presupune comanda accelerației, pe parcursul perioadelor de accelerare și decelerație, de așa manieră, încât să se asigure o variație a vitezei proporțională cu  $(\sin\omega t)^2$  [LAI01].

Ciclul de poziționare este structurat pe trei faze: accelerare, mers uniform, cu viteză constantă,  $v_u$ , și decelerație, pe parcursul căreia viteza va avea valorile:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_u \cdot \sin^2\omega t = (1/2)v_u \cdot [1 - \cos 2\omega t], \quad \text{pentru } 0 \leq t \leq t_a; \\ v(t) &= v_u, \quad \text{pentru } t_a < t \leq t_u; \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$v(t) = (1/2)v_u \cdot (1 + \cos 2\omega[t - (t_c - t_u)]), \text{ pentru } t_c - t_u \leq t \leq t_c.$$

Valorile accelerațiilor se obțin, prin derivarea în raport cu timpul, a vitezelor (3.47):

$$\begin{aligned} a(t) &= v_u \omega \cdot \sin 2\omega t, \text{ pentru } 0 \leq t \leq t_a; \\ a(t) &= 0, \text{ pentru } t_a < t \leq t_u; \\ a(t) &= -v_u \omega \cdot \sin 2\omega[t - (t_c - t_u)], \text{ pentru } t_c - t_u \leq t \leq t_c. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Pulsația de comandă,  $\omega$ , și timpul de accelerare,  $t_a$ , se pot obține din relațiile (3.48), impunând anumite condiții limită, ca, de exemplu, pentru valoarea maximă a accelerației:

$$a_m = v_u \cdot \omega$$

și:

$$t_u \cdot 2\omega = \pi.$$

Spațiul  $x(t)$  este reprezentat în figura 3.18,b, ca rezultat al integrării, funcție de timp, a ecuațiilor (3.47), cu condiția limită  $x(t_c) = x_m$ .